

Nichtlineare Dynamik und Synchronisation chaotischer Halbleiterlaser mit externen optischen Resonatoren

Diplomarbeit
vorgelegt von
Volker Ahlers
aus
Bremen



angefertigt im
Dritten Physikalischen Institut
der Georg-August-Universität zu Göttingen

1998

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Nichtlineare Dynamik und Synchronisation	5
2.1	Dynamische Systeme	5
2.2	Stabilität und Lyapunovexponenten	7
2.3	Delaydifferentialgleichungen	9
2.4	Synchronisation chaotischer Systeme	10
2.4.1	Unidirektional gekoppelte Systeme	13
2.4.2	Transversale Instabilitäten	15
2.5	Kommunikation mittels Chaos	15
2.6	Beispiel: Gekoppelte Chuaoszillatoren	17
3	Theorie der Halbleiterlaser	21
3.1	Halbleiter als Lasermaterial	21
3.2	Funktionsweise einer Laserdiode	24
3.3	Die semiklassischen Lasergleichungen	25
3.4	Fixpunkte und deren Stabilität	28
3.5	Aufspalten der Feldgleichung	30
3.6	Spontane Emission und Linienbreite	32
4	Halbleiterlaser mit externem Resonator	35
4.1	Low Frequency Fluctuations	36
4.2	Die Lang-Kobayashi-Modellgleichungen	38
4.3	Fixpunkte	39
4.4	Modellrechnungen zur LFF-Dynamik	43

4.5	Lyapunovexponenten des Delaysystems	47
4.6	Vergleich mit experimentellen Ergebnissen	51
4.6.1	Zeitreihenanalyse	52
4.6.2	Zeitintervalle zwischen den Intensitätseinbrüchen	57
5	Synchronisation chaotischer Laserdioden	59
5.1	Überblick	59
5.2	Beschreibung des Synchronisationsschemas	62
5.3	Modellrechnungen	65
5.3.1	Synchronisation identischer Laserdioden	65
5.3.2	Einfluß von Parameterunterschieden	68
5.3.3	Transversal instabile Fixpunkte	69
5.3.4	Einfluß einer Wellenlängendifferenz (Verstimmung)	72
5.4	Experiment	74
6	Zusammenfassung und Ausblick	79
A	Lineare Stabilitätsanalyse der Bilanzgleichungen	81
B	Integration von Delaydifferentialgleichungen	85
C	Notation und häufig verwendete Symbole	87
	Literaturverzeichnis	89

Es ist ein nicht geringes Vergnügen, mit seiner Einbildungskraft über die Grenze der vollendeten Schöpfung in den Raum des Chaos auszuschweifen.¹

IMMANUEL KANT

*What do you see Walt Whitman?
I see the curious rapid change of the light and shade²*

WALT WHITMAN

Kapitel 1

Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Synchronisation chaotischer Halbleiterlaser. Dadurch wird eine Verbindung hergestellt zwischen dem Gebiet der Synchronisation chaotischer Systeme und demjenigen der Dynamik von Halbleiterlasern. Gemeinsame Grundlagen stellen die nichtlineare Dynamik und die Chaostheorie dar: Ein Laser ist ein nichtlineares System, das zu chaotischer Dynamik fähig ist. Die Synchronisation chaotischer Laser ist nicht nur aus physikalischer Sicht interessant: Es wird an Anwendungen in optischen Kommunikationssystemen gedacht.

Die nichtlineare Dynamik behandelt Systeme, denen nichtlineare Bewegungsgleichungen zugrunde liegen. Für sie ist die für lineare Systeme geltende Superponierbarkeit von Lösungen nicht gegeben. Diese Tatsache erschwert ihre analytische Behandlung in erheblichem Maße. Dennoch beschäftigte sich HENRI POINCARÉ bereits Ende des letzten Jahrhunderts im Rahmen von Untersuchungen zur Stabilität der Planetenbahnen mit nichtlinearen Systemen. Dabei gelangte er zu der Erkenntnis, daß ein System, dessen Dynamik sich einer langfristigen Vorhersage entzieht, nicht notwendigerweise stochastischen Einflüssen ausgesetzt sein muß, sondern rein deterministisch sein kann.

Eine eingehendere Untersuchung derartiger irregulärer deterministischer Systeme begann

¹I. Kant: Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels [1755]. In: *Kant's gesammelte Schriften*, herausgegeben von der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Bd. I, Reimer, Berlin, 1902; S. 315.

²W. Whitman: *Leaves of Grass* [1892]. Bantam, New York, Toronto, London, 1983; S. 111. Frei übersetzt: *Was siehst Du, Walt Whitman? Ich sehe den seltsamen, raschen Wechsel von Licht und Schatten.*

jedoch erst einige Jahrzehnte später. Neben neuen analytischen Ergebnissen war es vor allem die durch die Verfügbarkeit digitaler Rechenanlagen gegebene Möglichkeit, nichtlineare Systeme mit Hilfe von numerischen Simulationen zu untersuchen, die den raschen Aufschwung der sogenannten Chaosforschung seit den sechziger Jahren dieses Jahrhunderts begründete. Die Untersuchungen beschränkten sich jedoch nicht allein auf Modellrechnungen. Vielmehr konnte chaotische Dynamik in etlichen realen, auch nichtphysikalischen Systemen beobachtet und studiert werden [10]. Charakteristisch für deterministisches Chaos ist eine empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Diese zeigen nicht nur Systeme, die eine große Zahl von Freiheitsgraden besitzen (etwa in der Hydrodynamik), sondern auch niedrigdimensionale Systeme mit wenigen Freiheitsgraden. Ein Beispiel ist das bekannte Lorenzsystem, ein aus lediglich drei nichtlinearen Differentialgleichungen bestehendes Modell einer Konvektionsströmung [57].

Trotz ihrer empfindlichen Abhängigkeit von kleinen Störungen ist es möglich, gekoppelte chaotische Systeme zu synchronisieren [22, 64, 2, 61]. Diese auf den ersten Blick verblüffende, seit den achtziger Jahren dieses Jahrhunderts bekannte Tatsache hat in den letzten Jahren großes Interesse auf sich gezogen, nicht zuletzt aufgrund möglicher Anwendungen in der Nachrichtenübertragung [39]. Die Synchronisation chaotischer Systeme ist, zusammen mit den wichtigsten Grundlagen der nichtlinearen Dynamik, Gegenstand des folgenden zweiten Kapitels.

Ähnlich rasant wie die Chaosforschung entwickelte sich seit den sechziger Jahren dieses Jahrhunderts die Laserforschung. Ein Laser (engl. für *light amplification by stimulated emission of radiation*, dt. Lichtverstärkung durch stimulierte Strahlungsemission) besteht aus einem aktiven (zur Ladungsträgerinversion geeigneten) Medium, einem optischen Resonator und einer Pumpe, die von außen Energie zuführt. Laser zeichnen sich durch hohe Leistungsdichten, niedrige Linienbreiten und sehr gute Kohärenzeigenschaften des emittierten Lichtes gegenüber anderen Lichtquellen aus. Der erste Laser, für den Rubin als aktives Medium diente, wurde 1960 konstruiert [49], nachdem das Laserprinzip bereits 1958 theoretisch beschrieben worden war [77].

Halbleiter wurden schon sehr früh als aktive Medien verwendet. Obwohl die ersten im Labor funktionierenden GaAs- und Ga(As_{1-x}P_x)-Laser bereits 1962 präsentiert wurden [27, 34, 55, 68], dauerte es jedoch bis in die achtziger Jahre, bis Halbleiterlaser in technischen Anwendungen eingesetzt werden konnten. Heute finden sie in Form von Laserdioden aufgrund ihrer geringen Größe, langen Lebensdauer und niedrigen Herstellungskosten weitreichende Verwendung, unter anderem in optischen Kommunikationssystemen, CD-Spielern und Laserdruckern [24]. In Kapitel 3 wird eine Einführung in die Funktionsweise und die Theorie der Halbleiterlaser gegeben. Dabei wird insbesondere auf die nichtlinearen semi-klassischen Lasergleichungen eingegangen.

Von sich aus liefert ein Halbleiterlaser Licht konstanter Intensität. Dies kann sich ändern,

wenn er von außen beeinflusst wird. Da ein Laser ein nichtlineares System darstellt, besteht die Möglichkeit zu komplexer, auch chaotischer Dynamik. Eine Form von äußerer Beeinflussung, die auch in vielen technischen Anwendungen auftritt, ist die Rückkopplung durch einen externen optischen Resonator. Unter den vielen beobachtbaren Phänomenen sticht das der niedrigfrequenten Intensitätsfluktuationen (engl. *low frequency fluctuations*) besonders hervor, das sich durch in unregelmäßigen Abständen im Nanosekundenbereich auftretende abrupte Einbrüche der Intensität auszeichnet. Es ist in den letzten fünfzehn Jahren eingehend untersucht und häufig kontrovers diskutiert worden [81]. Bis heute existiert noch keine allgemein anerkannte Erklärung. In Kapitel 4 werden nach einer theoretischen Einführung die durchgeführten numerischen und experimentellen Untersuchungen des Halbleiterlasers mit externem optischen Resonator beschrieben, wobei das Phänomen der *low frequency fluctuations* im Mittelpunkt steht. Von besonderem Interesse ist dabei die Stabilität der Lösungen, die darüber entscheidet, ob das System chaotisch ist.

In Kapitel 5 wird der Bogen zur Synchronisation chaotischer Systeme geschlagen. Es wird ein Schema vorgestellt, daß es ermöglicht, zwei gekoppelte chaotische Laserdioden mit externen optischen Resonatoren zu synchronisieren. Nach einem Überblick über den momentanen Stand der Forschung zur Synchronisation chaotischer Laser werden die Modellgleichungen erläutert, welche die beiden gekoppelten Systeme beschreiben. Es werden die Ergebnisse von numerischen Modellrechnungen dargestellt und diskutiert, bevor schließlich auf den Stand der experimentellen Umsetzung eingegangen wird. Dabei wird versucht, mögliche Probleme durch einen Vergleich mit den Ergebnissen der numerischen Simulationen ausfindig zu machen.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeit ist in Kapitel 6 zu finden. Zusätzlich wird ein Ausblick auf offene Fragestellungen gegeben.

Anhang A ist der linearen Stabilitätsanalyse der Bilanzgleichungen des Halbleiterlasers ohne externen Resonator gewidmet. In Anhang B wird das verwendete numerische Verfahren zur Integration der im Modell vorkommenden Delaydifferentialgleichungen beschrieben. Schließlich befindet sich in Anhang C eine Übersicht über die verwendete Notation und häufig auftretende Symbole.

Für Begriffe, die keine einheitliche deutsche Bezeichnung besitzen, werden die englischen Bezeichnungen verwendet; in diesen Fällen wird jedoch eine deutsche Übersetzung angegeben.

Kapitel 2

Nichtlineare Dynamik und Synchronisation

In diesem Kapitel werden zunächst einige später benötigte Begriffe der nichtlinearen Dynamik eingeführt, bevor die Grundlagen der Synchronisation chaotischer Systeme erläutert werden. Dabei wird weder auf Vollständigkeit noch auf mathematische Strenge Anspruch erhoben. Wo nicht anders vermerkt, orientiert sich die Darstellung an den Referenzen [10, 16, 57, 59]. Abschließend wird die Synchronisation chaotischer Systeme am Beispiel zweier gekoppelter Chuaoszillatoren experimentell demonstriert.

2.1 Dynamische Systeme

Allgemein ist ein *dynamisches System* ein System, dessen Zustand sich mit der Zeit *deterministisch* ändert. Eine wichtige Untermenge wird durch solche Systeme gebildet, die sich durch einen Fluß im *Zustands-* oder *Phasenraum* \mathbb{R}^d beschreiben lassen. Ausgehend von Systemzuständen $\mathbf{x} \in M \subset \mathbb{R}^d$ wird unter einem *Fluß* auf einem offenen Gebiet $M \subset \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \varphi(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{x} && \text{für alle } \mathbf{x} \in M, \\ \varphi[t, \varphi(s, \mathbf{x})] &= \varphi(s+t, \mathbf{x}) && \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in M \end{aligned}$$

verstanden. Bei gegebenem φ hängt der Zustand des Systems zu einem Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ also nur von dessen Zustand zum Zeitpunkt t_0 ab. Als *Trajektorie* von φ durch \mathbf{x}_0 wird die Menge $\{\varphi(t, \mathbf{x}_0) | t \in \mathbb{R}\}$ bezeichnet. Es kann gezeigt werden, daß sich Trajektorien nicht schneiden [36]; daraus folgt, daß die zeitliche Entwicklung des Systemzustandes durch φ eindeutig festgelegt ist.

Ein Zusammenhang mit Systemen von Differentialgleichungen ergibt sich über das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} \right|_{t=0},$$

so daß ein Fluß φ gemäß $\varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t)$ durch ein System von Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

mit der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ definiert werden kann. Dabei sind $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t))^T$ und $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_d(\mathbf{x}))^T$, wobei \mathbf{x}^T den transponierten Vektor zu \mathbf{x} bezeichnet. Jedoch definiert nicht jedes System von Differentialgleichungen einen Fluß: Damit durch (2.1) ein Fluß definiert wird, muß $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in M lokal einer Lipschitzbedingung genügen¹ (Existenz- und Eindeutigkeitsatz); hinreichend dafür ist, daß \mathbf{f} bzgl. \mathbf{x} stetig partiell differenzierbar ist. Anzumerken ist, daß sich Differentialgleichungen höherer Ordnung, ebenso wie nichtautonome Differentialgleichungen, durch Einführen zusätzlicher Variablen stets in Systeme der Form (2.1) überführen lassen.

Bisher wurden nur zeitkontinuierliche Systeme betrachtet, deren Zustände $\mathbf{x}(t)$ sich kontinuierlich mit der Zeit $t \in \mathbb{R}$ ändern. In der nichtlinearen Dynamik spielen zeitdiskrete Systeme, deren Zustände \mathbf{x}^n sich in diskreten Schritten $n \in \mathbb{Z}$ ändern, ebenfalls eine wichtige Rolle; sie können durch Differenzgleichungen definiert werden. Für diese Arbeit haben derartige Systeme jedoch keine Bedeutung.

In *konservativen Systemen* bleiben Phasenraumvolumina unter Wirkung des Flusses konstant, nach dem Liouvilleschen Satz gilt mit (2.1) $\operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. In *dissipativen Systemen* dagegen existieren Gebiete im Phasenraum, in denen Phasenraumvolumina durch den Einfluß von Reibung kontrahiert werden; dort gilt $\operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0$ [57]. Während sowohl in der Himmelsmechanik als auch in der Quantenmechanik erfolgreich mit konservativen Modellsystemen gearbeitet werden kann, herrschen auf mittleren Längenskalen dissipative Systeme vor.

Es lassen sich fünf Arten von Trajektorien unterscheiden: Fixpunkte, periodische, quasiperiodische und chaotische Orbits sowie Transienten. Im Falle eines *Fixpunktes* \mathbf{x}^s gilt $\varphi(t, \mathbf{x}^s) = \mathbf{x}^s$ für alle $t \in \mathbb{R}$, was gemäß (2.1) gleichbedeutend ist mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}^s) = 0$. Ein *periodischer Orbit* oder *Grenzyklus* zeichnet sich dadurch aus, daß sich der Systemzustand nach einer Periode T wiederholt: Für jeden Punkt \mathbf{x}_0 des Orbits gilt $\varphi(T, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Ein *quasiperiodischer Orbit* besitzt mindestens zwei gleichzeitig vorliegende Frequenzen, die in einem irrationalen Verhältnis zueinander stehen. Folglich wird kein Systemzustand im Laufe der Zeit mehrmals eingenommen, die Trajektorie bewegt sich auf einem Torus und füllt dessen Oberfläche aus. Ein *chaotischer Orbit* nimmt ebenfalls keinen Systemzustand mehrmals ein. Zusätzlich existiert eine *sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen*: Zwei im Phasenraum nahe beieinander liegende Zustände entfernen sich mit der Zeit im Mittel exponentiell voneinander; die Trajektorien verlaufen jedoch stets in einem begrenzten Bereich des Phasenraums.

¹ Seien $M \subset \mathbb{R}^d$ und $\mathbf{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^d$. \mathbf{f} genügt in M lokal einer Lipschitzbedingung genau dann, wenn gilt: $\forall \mathbf{x}_0 \in M \exists$ Umgebung $V(\mathbf{x}_0) \subset M$, $c > 0$, so daß $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ gilt: $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\| \leq c\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$.

Alle bisher beschriebenen Arten von Trajektorien zeichnen sich dadurch aus, daß die Bewegung auf einer begrenzten Teilmenge des Phasenraums stattfindet: einem einzelnen Punkt, einer geschlossenen Kurve, einem Torus oder einer komplizierteren Menge im Falle eines chaotischen Orbits. Ist eine solche Teilmenge anziehend, d. h. existiert eine Umgebung von Zuständen, die sich mit der Zeit auf die Teilmenge zubewegen, so stellt diese einen *Attraktor* dar.² Die Umgebung von Zuständen, auf die der Attraktor anziehend wirkt, wird als dessen *Einzugsbereich* (engl. *basin of attraction*) bezeichnet. Da durch den Fluß ein Phasenraumvolumen im Einzugsbereich auf den Attraktor zusammengezogen wird, existieren Attraktoren nur in dissipativen Systemen.

Eine *Transiente* ist schließlich eine Trajektorie, die sich nicht auf einem Attraktor bewegt. Sie kann sich auf einen solchen zubewegen, aber auch nach unendlich streben.

2.2 Stabilität und Lyapunovexponenten

Ein Fixpunkt \mathbf{x}^s heißt *stabil (im Sinne Lyapunovs)* genau dann, wenn für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß für jeden Zustandsvektor \mathbf{x}_0 mit $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^s\| < \delta$ folgt, daß für alle $t \geq 0$ die Trajektorie $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ existiert und $\|\varphi(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^s\| < \varepsilon$ ist. In Worten ausgedrückt bedeutet dies, daß Trajektorien, die einmal in der Nähe eines stabilen Fixpunktes verlaufen, für alle Zeit in dessen Nähe bleiben. Ist ein Fixpunkt nicht stabil, so heißt er *instabil*.

Ferner heißt ein Fixpunkt \mathbf{x}^s *asymptotisch stabil* genau dann, wenn er stabil ist und zusätzlich ein $\delta > 0$ existiert, so daß für jeden Zustandsvektor \mathbf{x}_0 mit $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^s\| < \delta$ folgt, daß für alle $t \geq 0$ die Trajektorie $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ existiert und $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^s\| = 0$ ist.

Zur Untersuchung der lokalen Stabilität von Fixpunkten nichtlinearer Systeme ist häufig eine *lineare Stabilitätsanalyse* ausreichend. Eine Entwicklung der Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ aus (2.1) führt auf das System

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^s) + \mathbf{Df}(\mathbf{x}^s)[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^s] + \mathcal{O}(\mathbf{x}^2), \quad (2.2)$$

wobei

$$\mathbf{Df}(\mathbf{x}^s) = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) \Big|_{\mathbf{x}^s}$$

die Jacobimatrix von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ an der Stelle \mathbf{x}^s ist. Für eine Störung $\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^s$ ergibt sich bei Vernachlässigung quadratischer und höherer Terme das lineare System

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{Df}(\mathbf{x}^s)\delta\mathbf{x}(t), \quad (2.3)$$

²Eine mathematische Beschreibung eines Attraktors wird beispielsweise in Ref. [10], S. 142 f, gegeben; es existiert jedoch noch keine allgemein anerkannte Definition.

welches einen Fixpunkt bei $\delta \mathbf{x}^s = 0$ besitzt. Für diesen gilt mit den Eigenwerten λ_i , $i = 1, \dots, d$, von $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^s)$

$$\forall i : \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \mathbf{x}^s \text{ ist asymptotisch stabil,}$$

$$\exists i : \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \mathbf{x}^s \text{ ist instabil.}$$

Nach dem Satz von Hartmann-Grobmann gilt die Stabilitätsaussage in diesen beiden Fällen lokal auch für das nichtlineare System (2.1). Gibt es keine Eigenwerte mit positivem Realteil, wohl aber mindestens einen, dessen Realteil Null ist, so läßt sich aus der Betrachtung des linearen Systems keine Aussage über die Stabilität des Fixpunktes \mathbf{x}^s des nichtlinearen Systems treffen; in diesem Fall entscheiden höhere Terme in (2.2) über die Stabilität.

Wie bereits erwähnt, ist chaotische Dynamik durch eine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen gekennzeichnet. Diese läßt sich quantitativ mit Hilfe von *Lyapunov-exponenten (charakteristischen Exponenten)* erfassen, die die zeitliche Entwicklung des Abstandes zwischen im Phasenraum benachbarten Trajektorien beschreiben. Sie werden mit Hilfe der $d \times d$ -Matrix

$$\mathbf{T}_x = \left(\frac{\partial \varphi(1, x_i)}{\partial x_j} \right)$$

definiert, die eine Linearisierung des Flusses an der Stelle \mathbf{x} beschreibt. \mathbf{T}_x^n bezeichnet das Produkt aus n solcher Linearisierungen entlang einer Trajektorie $\varphi(t, \mathbf{x})$,

$$\mathbf{T}_x^n = \mathbf{T}_{\varphi(n-1, \mathbf{x})} \cdots \mathbf{T}_{\varphi(1, \mathbf{x})} \mathbf{T}_x.$$

Nach dem multiplikativen Ergodentheorem von Oseledec existiert für fast alle \mathbf{x} (bzgl. eines ergodischen Maßes) die Matrix

$$\Lambda_x = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{T}_x^{nT} \mathbf{T}_x^n)^{1/2n},$$

wobei \mathbf{T}_x^{nT} die transponierte Matrix zu \mathbf{T}_x^n ist [16]. Λ_x ist nach Konstruktion symmetrisch und positiv semidefinit, besitzt also nur reelle, nichtnegative Eigenwerte. Als Lyapunovexponenten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$ werden die natürlichen Logarithmen dieser Eigenwerte definiert; sie sind für fast alle \mathbf{x} unabhängig von \mathbf{x} [16].

Ist E_x^i der durch die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\exp(\lambda_j)$, $j \geq i$, von Λ_x aufgespannte Unterraum des \mathbb{R}^d und $\delta \mathbf{x} \in E_x^i \setminus E_x^{i+1}$ eine Störung des Zustandsvektors \mathbf{x}_0 , so gilt für fast alle \mathbf{x}_0 [16]

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\|\mathbf{T}_{x_0}^n \delta \mathbf{x}\|}{\|\delta \mathbf{x}\|}.$$

Daraus läßt sich ein Verfahren zur numerischen Berechnung der Lyapunovexponenten ableiten. Die zeitliche Entwicklung einer Störung $\delta\mathbf{x}(t)$ eines Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$ wird mit der Jacobimatrix \mathbf{Df} der Funktion \mathbf{f} aus (2.1) in linearer Näherung durch

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{Df}[\mathbf{x}(t)]\delta\mathbf{x}(t) \quad (2.4)$$

beschrieben. Eine Störung, die eine Komponente in Richtung des Eigenvektors \mathbf{v}_1 zum größten Eigenwert $\exp(\lambda_1)$ von Λ_x besitzt, wächst mit der Zeit vornehmlich in dieser Richtung an. Um alle d Eigenwerte zu bestimmen, wird das System (2.1) zusammen mit d Systemen der Form (2.4) für d linear unabhängige Störungen $\delta\mathbf{x}^i$ integriert, für die $\|\delta\mathbf{x}^i(t_0)\| = \delta x_0$, $i = 1, \dots, d$, gilt. Um ein übermäßiges Anwachsen aller $\delta\mathbf{x}^i$ in Richtung des Eigenvektors \mathbf{v}_i zu verhindern, werden sie in nicht zu großen Zeitabständen Δt auf die Länge δx_0 reorthonormalisiert. Die Lyapunovexponenten ergeben sich dann aus

$$\lambda_i = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=1}^N \log \frac{\|\delta\mathbf{x}^i(k\Delta t)\|}{\delta x_0}$$

für eine möglichst große Zahl N [57].

2.3 Delaydifferentialgleichungen

Für das in dieser Arbeit untersuchte Lasersystem ist eine Verallgemeinerung der beschriebenen Konzepte auf Delaydifferentialgleichungen erforderlich. Sie gehören der größeren Klasse der retardierten Funktionaldifferentialgleichungen an. Eine *retardierte Funktionaldifferentialgleichung* ist definiert durch [26]

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x_t, t), \quad (2.5)$$

mit der Schar von Funktionen

$$x_t : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad x_t \text{ stetig.}$$

Dadurch ist eine sehr allgemeine Klasse von Gleichungen gegeben, die gewöhnliche Differentialgleichungen ebenso umfaßt wie Integro-Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 d\theta g[x(t + \theta), \theta, t]$$

und retardierte Differential-Differenzgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f\{x(t), x[t - \tau_1(t)], \dots, x[t - \tau_n(t)], t\},$$

die im folgenden kurz *Delaydifferentialgleichungen* genannt werden; $\dot{x} = dx/dt$ ist dabei die zeitliche Ableitung. Durch retardierte Funktionaldifferentialgleichungen lassen sich Systeme beschreiben, deren Zustandsänderung nicht nur vom momentanen Zustand, sondern auch von vergangenen Zuständen abhängig ist. Beispiele finden sich unter anderem in Populationsdynamik, Kontrolltheorie [41], Optik [35] und Physiologie [48].

In dieser Arbeit werden Systeme von Delaydifferentialgleichungen erster Ordnung mit einer konstanten Zeitverzögerung τ der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)] \quad (2.6)$$

betrachtet. Zur Bestimmung der Zeiteentwicklung von $\mathbf{x}(t)$ ab einem Zeitpunkt t_0 ist die Kenntnis der Funktion $\mathbf{x}(t)$ auf dem gesamten Intervall $[t_0 - \tau, t_0] \subset \mathbb{R}$ erforderlich. Der Zustand des Systems wird also durch eine Funktion auf einem reellen Intervall beschrieben, wodurch der Zustandsraum des Systems unendlichdimensional wird. Auch für Delaydifferentialgleichungen lassen sich Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen treffen, auf die hier aber nicht eingegangen werden soll.

Da Systeme von Delaydifferentialgleichungen unendlichdimensional sind, besitzen sie unendlich viele Lyapunovexponenten. Für eine Störung $\delta\mathbf{x}(t)$ des Vektors $\mathbf{x}(t)$ gilt in linearer Näherung

$$\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{Df}_1[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)]\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{Df}_2[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)]\delta\mathbf{x}(t - \tau),$$

wobei \mathbf{Df}_1 und \mathbf{Df}_2 die Jacobimatrizen von \mathbf{f} bzgl. $\mathbf{x}(t)$ bzw. $\mathbf{x}(t - \tau)$ sind (siehe auch Abschnitt 4.5). Ebenso wie der Systemzustand ist der Zustand der Störung zum Zeitpunkt t_0 durch eine Funktion auf dem Intervall $[t_0 - \tau, t_0]$ gegeben. Für eine numerische Berechnung der Lyapunovexponenten von Delaysystemen wird dieses Intervall diskretisiert [18]. Details dazu werden in Abschnitt 4.5 am Beispiel der Modellgleichungen für eine Laserdiode mit externem Resonator behandelt.

2.4 Synchronisation chaotischer Systeme

Synchronisation gekoppelter periodischer Oszillatoren ist ein lange bekanntes Phänomen, welches zuerst 1673 von HUYGENS am Beispiel zweier Pendeluhren beschrieben wurde, die an ein und demselben Holzbalken befestigt waren und sich dadurch gegenseitig so beeinflussten, daß die Pendel stets in genau entgegengesetzter Phase schwingen. Systematisch untersuchten VAN DER POL und VAN DER MARK 1926 und 1927 die Synchronisation gekoppelter elektrischer Oszillatoren [66, 65]. Von Synchronisation zweier periodischer Oszillatoren mit den Phasen $\phi_1(t)$ und $\phi_2(t)$ wird gesprochen, falls entweder Phasenstabilisierung (engl. *phase locking*) vorliegt,

$$|n\phi_1(t) - m\phi_2(t)| < c,$$

oder aber Frequenzmitnahme (engl. *frequency entrainment*),

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}.$$

Dabei sind $n, m \in \mathbb{N}$ ganze Zahlen, $c > 0$ eine möglichst kleine Konstante und $\omega_i = \langle d\phi_i/dt \rangle_t$ die Frequenzen der Oszillatoren [59].

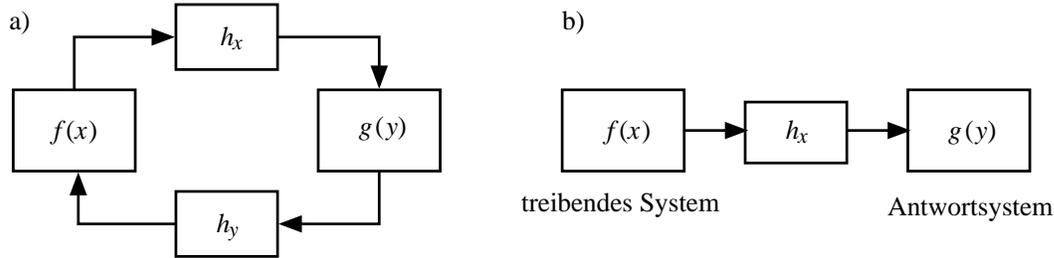


Abbildung 2.1: Zwei Systeme $f(x)$ und $g(y)$ mit a) bidirektionaler bzw. b) unidirektionaler Kopplung.

Grundsätzlich wird zwischen bi- und unidirektionaler Kopplung unterschieden (siehe Abb. 2.1). Im Falle *bidirektionaler Kopplung* beeinflussen sich beide Systeme gegenseitig, so daß sie allgemein durch die gekoppelten Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\{\mathbf{x}(t), \mathbf{h}_y[\mathbf{y}(t)]\}, \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}\{\mathbf{x}(t), \mathbf{h}_x[\mathbf{x}(t)]\} \quad (2.8)$$

dargestellt werden können, wobei die Funktionen $\mathbf{h}_x(\mathbf{x})$ und $\mathbf{h}_y(\mathbf{y})$ die Kopplungssignale beschreiben und $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$ die zeitliche Ableitung ist. Im Falle *unidirektionaler Kopplung* gibt es dagegen ein treibendes System und ein Antwortsystem (engl. *drive* und *response*). Das treibende System beeinflusst das Antwortsystem, wird aber selbst von diesem nicht beeinflusst. Dies läßt sich allgemein ausdrücken durch

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\{\mathbf{x}(t)\}, \quad (2.9)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}\{\mathbf{x}(t), \mathbf{h}[\mathbf{x}(t)]\}, \quad (2.10)$$

wobei $\mathbf{x}(t)$ den Zustand des treibenden Systems und $\mathbf{y}(t)$ den des Antwortsystems bezeichnen.

Identische Synchronisation ist möglich, falls sich $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ im gleichen Phasenraum \mathbb{R}^d bewegen und eine nichtleere Menge $M = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \in \mathbb{R}^{2d}\}$ existiert, so daß für alle Paare von Anfangszuständen $(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{y}(t_0))^T \in M$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| = 0$$

gilt. In diesem Fall befinden sich beide Systeme nach einer gewissen Einschwingzeit zu gleichen Zeiten in gleichen Zuständen; sie führen identische Oszillationen aus.

Im Falle identischer Synchronisation ist die *Synchronisationsmannigfaltigkeit* M_{syn} im Phasenraum \mathbb{R}^{2d} gegeben durch $M_{\text{syn}} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \in \mathbb{R}^{2d} \mid \mathbf{x} = \mathbf{y}\}$. Ein beliebiger Punkt $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \in \mathbb{R}^{2d}$ kann gemäß

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\parallel} \\ \mathbf{x}_{\parallel} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_{\perp} \\ \mathbf{x}_{\perp} \end{pmatrix} = \mathbf{z}_{\parallel} + \mathbf{z}_{\perp}$$

mit $\mathbf{x}_{\parallel} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ und $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ durch zwei Anteile $\mathbf{z}_{\parallel}, \mathbf{z}_{\perp} \in \mathbb{R}^{2d}$ dargestellt werden, die die Dynamik des gekoppelten Systems parallel bzw. senkrecht zur Synchronisationsmannigfaltigkeit beschreiben (siehe Abb. 2.2).

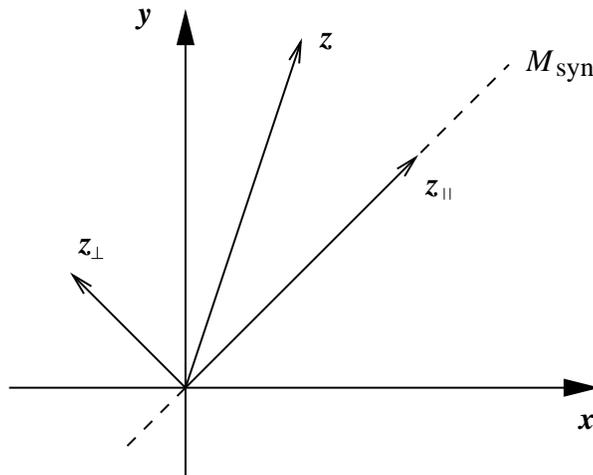


Abbildung 2.2: Zerlegung von $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^T$ in einen Anteil $\mathbf{z}_{\parallel} = (\mathbf{x}_{\parallel}, \mathbf{x}_{\parallel})^T/2$ parallel zur Synchronisationsmannigfaltigkeit M_{syn} und einen Anteil $\mathbf{z}_{\perp} = (-\mathbf{x}_{\perp}, \mathbf{x}_{\perp})^T/2$ senkrecht zu ihr.

Die Vorstellung der Synchronisation chaotischer Systeme mag auf den ersten Blick widersprüchlich anmuten: Laufen die Trajektorien beider Systeme wegen der sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen nicht exponentiell auseinander, so daß ein synchroner Zustand bei der kleinsten Störung eines der Systeme sofort wieder zerstört werden würde? Es zeigt sich jedoch, daß es sehr wohl möglich ist, daß beide Systeme für sich betrachtet chaotische Dynamik zeigen, sich aber zugleich in einem stabilen synchronen Zustand befinden; „stabil“ bedeutet in diesem Fall, daß sich die Trajektorien beider Systeme wieder asymptotisch einander nähern, wenn eines der Systeme gestört wird. Bezogen auf \mathbf{x}_{\perp} und \mathbf{x}_{\parallel} bedeutet identische Synchronisation chaotischer Systeme, daß das System $\dot{\mathbf{x}}_{\perp} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_{\perp}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ einen asymptotisch stabilen Fixpunkt bei $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{0}$ besitzt, das System $\dot{\mathbf{x}}_{\parallel} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x})$ jedoch chaotisch ist. Die chaotische Dynamik findet also allein auf der Synchronisationsmannigfaltigkeit statt, die als Ganze asymptotisch stabil ist.

Synchronisation chaotischer Systeme wurde bereits 1983 von FUJISAKA und YAMADA [22], 1984 von PIKOVSKY [64] und 1986 von AFRAIMOVICH, VERICHEV und RABINOVICH [2] für den Fall bidirektionaler Kopplung gezeigt. In den Arbeiten wurden sowohl theoretische als auch experimentelle Untersuchungen durchgeführt. Größeres Interesse erregte das Thema jedoch erst durch die 1990 von PECORA und CARROLL veröffentlichte Arbeit, in der die Autoren Synchronisation unidirektional gekoppelter chaotischer Systeme sowohl experimentell als auch mit Hilfe numerischer Simulationen zeigten [61]. Außerdem schlugen sie sichere (verschlüsselte) Kommunikation als mögliche Anwendung des Phänomens vor (siehe Abschnitt 2.5).

2.4.1 Unidirektional gekoppelte Systeme

Da in dieser Arbeit hauptsächlich unidirektional gekoppelte Systeme untersucht werden, soll diesen nun besonderes Augenmerk gelten.

Eine formale Methode zur Beschreibung solcher Systeme ist die *Aktiv-Passiv-Zerlegung* (engl. *active-passive decomposition*, APD) [40, 60, 37]. Das autonome Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ des treibenden Systems wird dabei in ein nichtautonomes Vektorfeld $\mathbf{g}(\mathbf{x}, s)$ überführt. Demnach beschreiben

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), s(t)] \quad (2.11)$$

das treibende System,

$$s(t) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t)] \quad \text{oder} \quad \dot{s}(t) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t), s(t)]$$

das Kopplungssignal und

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{y}(t), s(t)] \quad (2.12)$$

das Antwortsystem. Es liegen also mit (2.11) und (2.12) zwei identische Systeme vor, die von dem gleichen Signal $s(t)$ getrieben werden, welches wiederum vom Zustand des treibenden Systems abhängig ist. Um Synchronisation zu erreichen, müssen die Funktionen \mathbf{f} , \mathbf{g} und \mathbf{h} geeignet gewählt werden. Zwei wichtige Arten der Kopplung sind die *Zerlegung in Untersysteme* und die *dissipative Kopplung*.

Zerlegung in Untersysteme: Bei dieser Methode, die von PECORA und CARROLL [61] verwendet wurde, wird ein d -dimensionales dynamisches System $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ in zwei Untersysteme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{f}_v(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \\ \dot{\mathbf{w}}(t) &= \mathbf{f}_w(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

zerlegt, wobei $\mathbf{v} = (u_1, \dots, u_k)^T$ und $\mathbf{w} = (u_{k+1}, \dots, u_d)^T$ sind. Wird nun ein System

$$\dot{\mathbf{w}}'(t) = \mathbf{f}_w(\mathbf{v}, \mathbf{w}')$$

ebenfalls mit $\mathbf{v}(t)$ getrieben, so tritt bei geeigneter Zerlegung identische Synchronisation zwischen $\mathbf{w}(t)$ und $\mathbf{w}'(t)$ ein.

Die Beschreibung durch eine APD wird durch die Ersetzungen $\mathbf{x} = \mathbf{w}$, $\mathbf{y} = \mathbf{w}'$, $\mathbf{s} = \mathbf{v}$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \mathbf{f}_v(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \mathbf{f}_w(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ und $\mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{s}) = \mathbf{f}_w(\mathbf{v}, \mathbf{w}')$ erreicht [60].

Dissipative Kopplung: Bei dieser (auch diffusive Kopplung oder engl. *error-feedback coupling* genannten) Kopplungsart wird in das zweite System ein zusätzliches Signal injiziert, das proportional zum Unterschied zwischen den Zuständen beider Systeme ist:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine Matrix ist, welche die Kopplung beschreibt.

Hier ergibt sich die Beschreibung durch eine APD, indem $\mathbf{s} = \mathbf{x}$ und $\mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{K}(\mathbf{s} - \mathbf{z})$ (für $\mathbf{z} = \mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{z} = \mathbf{y}$) gesetzt werden [60].

Neben diesen beiden Standardmethoden lassen sich durch den Formalismus der APD noch einige andere Kopplungsarten beschreiben. Für die in dieser Arbeit untersuchten gekoppelten Delaydifferentialgleichungen ist allerdings eine Verallgemeinerung erforderlich. Hier wird das Vektorfeld $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)]$ in ein Vektorfeld $\mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau), \mathbf{s}(t)]$ überführt, so daß das treibende System durch

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau), \mathbf{s}(t)],$$

die Kopplung durch

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)] \quad \text{oder} \quad \dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau), \mathbf{s}(t), \mathbf{s}(t - \tau)]$$

und das Antwortsystem durch

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t - \tau), \mathbf{s}(t)],$$

beschrieben werden.

Ein notwendiges Kriterium für identische Synchronisation läßt sich mit Hilfe der sogenannten *bedingten Lyapunovexponenten* formulieren [61]. Sie sind definiert als die Lyapunovexponenten des vom treibenden System getriebenen Antwortsystems. Ist der größte bedingte Lyapunovexponent negativ, so bedeutet das, daß eine Störung des synchronisierten Orbits mit der Zeit verschwindet. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß die Synchronisationsmannigfaltigkeit im gemeinsamen Phasenraum \mathbb{R}^{2d} im Mittel anziehend ist. Angemerkt werden muß, das dadurch zwar ein *notwendiges*, aber *kein hinreichendes* Kriterium für Synchronisation beschrieben ist. Der Grund dafür wird im nächsten Abschnitt erläutert.

2.4.2 Transversale Instabilitäten

Die Feststellung, daß alle bedingten Lyapunovexponenten negativ sind, macht lediglich eine Aussage über die *mittlere* Zeitentwicklung von Störungen der Synchronisation. Sie schließt nicht aus, daß die Synchronisation über kurze Zeitabschnitte zusammenbricht. Gerade dies ist jedoch möglich, wenn die Synchronisationsmannigfaltigkeit invariante Untermengen (z. B. instabile Fixpunkte oder periodische Orbits) enthält, die transversal instabil sind. Damit ist gemeint, daß das Antwortsystem nicht mit dem treibenden System synchronisiert, wenn sich letzteres auf einer solchen transversal instabilen invarianten Untermenge bewegt. Im gemeinsamen Phasenraum \mathbb{R}^{2d} entsprechen diesen Untermengen Orbits auf der Synchronisationsmannigfaltigkeit, die transversal zu dieser instabil sind.

Bewegt sich das Gesamtsystem *exakt* auf der Synchronisationsmannigfaltigkeit, so gerät es nicht in den Einfluß der instabilen Mannigfaltigkeiten der transversal instabilen Orbits (da sie sich transversal zur Synchronisationsmannigfaltigkeit und außerhalb von ihr befinden). In der Praxis existieren jedoch stets Störungen der perfekten Synchronisation durch Rauschen (das auch in numerischen Simulationen in Form von Rundungsfehlern auftritt) oder durch Parameterunterschiede zwischen den beiden Systemen (zwei experimentelle Systeme sind niemals exakt gleich). Daher bewegt sich das Gesamtsystem nicht exakt auf der Synchronisationsmannigfaltigkeit, sondern nur in ihrer Nähe. Es kann also durchaus in den Einfluß der instabilen Mannigfaltigkeiten der transversal instabilen Orbits gelangen. In diesem Fall wird sich das Gesamtsystem von der Synchronisationsmannigfaltigkeit entfernen, bis es in einen Bereich gelangt, in dem diese wieder anziehend ist. Treten derartige Ereignisse nur an einigen begrenzten Stellen der Synchronisationsmannigfaltigkeit auf, so ist diese im Mittel trotzdem anziehend, so daß alle bedingten Lyapunovexponenten negativ sind. Nähere Einzelheiten sind z. B. den Referenzen [28, 73] zu entnehmen. Ein Beispiel für dieses in der englischsprachigen Literatur *attractor bubbling* genannte Phänomen wird in Abschnitt 5.3.3 gegeben.

2.5 Kommunikation mittels Chaos

PECORA und CARROLL schlugen bereits 1990 vor, Synchronisation unidirektional gekoppelter chaotischer Systeme für sichere (also verschlüsselte) Kommunikation zu nutzen [61]. Die Grundidee, das treibende System als Sender und das Antwortsystem als Empfänger aufzufassen, kann in verschiedener Weise variiert werden. Die folgende Übersicht über einige wichtige Kommunikationsschemata orientiert sich an Ref. [39].³

³Für die folgenden Namen existieren keine deutschen Bezeichnungen. Übersetzen lassen sie sich etwa mit chaotisches Maskieren, Chaosmodulation bzw. Chaosumtastung (in Analogie zum Begriff Phasenumtastung für engl. *phase shift keying*).

Chaotic masking (CM): Hier wird das analoge Informationssignal $i(t)$ auf das chaotische Trägersignal $x(t)$, welches durch das Sendersystem erzeugt wird, aufaddiert. Ist das Amplitudenverhältnis von Informations- zu Trägersignal klein genug, so synchronisiert das identische Empfängersystem mit der ursprünglichen Dynamik des Senders. Eine Schätzung des Informationssignals kann deshalb durch Subtraktion des durch den Empfänger gelieferten Signals $y(t)$ vom übertragenen Signal $x(t) + i(t)$ gewonnen werden [15].

Chaos modulation: Dieses Verfahren macht Gebrauch von der Aktiv-Passiv-Zerlegung. Das skalare aktive Signal $s(t)$ ist nun zusätzlich vom analogen Informationssignal $i(t)$ abhängig: $s(t) = h(\mathbf{x}, i)$. Ist h bzgl. i invertierbar, so läßt sich mittels $\hat{i}(t) = h^{-1}(\mathbf{y}, s)$ eine Schätzung des Informationssignals gewinnen [40]. Dieses Verfahren ist verwandt mit dem *inverse system approach* [39].

Chaos shift keying (CSK): Dieses Verfahren dient der Übertragung digitaler Signale. Sowohl der Sender als auch der Empfänger bestehen im Falle binärer Signale aus zwei unterschiedlichen Systemen, die eine ähnliche chaotische Dynamik besitzen (üblicherweise zwei Realisierungen des gleichen Systems mit leicht unterschiedlichen Parametern). Je nach zu übertragendem Symbol „0“ oder „1“ wird das Signal des ersten bzw. zweiten Systems gesendet. Auf der Empfängerseite wird das gesendete Signal für beide Systeme als Kopplungssignal verwendet. Durch einen Vergleich der Synchronisationsfehler beider Systeme kann entschieden werden, welches Symbol gesendet wurde [58].

Die Verschlüsselung besteht bei allen Verfahren darin, daß das Empfängersystem dem Sendersystem entsprechen muß, damit das Informationssignal rekonstruiert werden kann. Während der Übertragung ist das Informationssignal im Breitbandpektrum des chaotischen Trägersignals „versteckt“. Es muß allerdings angemerkt werden, daß für die meisten vorgeschlagenen Verfahren nicht bekannt ist, wie sicher sie tatsächlich sind. Für einige Verfahren, die auf niedrigdimensionaler chaotischer Dynamik beruhen, wurden Methoden vorgeschlagen, übertragene Signale zu entschlüsseln [63]. In neueren Arbeiten werden daher in zunehmendem Maße Systeme untersucht, die durch hochdimensionale chaotische Dynamik gekennzeichnet sind [1, 23, 62].

2.6 Beispiel: Gekoppelte Chuaoszillatoren

Als experimentelles Beispiel für die Synchronisation chaotischer Systeme dienen zwei gekoppelte Chuaoszillatoren [40]. In Abb. 2.3 ist der Schaltplan eines solchen Oszillators dargestellt. g ist ein spannungsabhängiger Widerstand, dessen Leitwert die stückweise lineare Kennlinie

$$g(U) = m_0 U + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|U + B_p| - |U - B_p|)$$

$$= \begin{cases} m_0(U + B_p) - m_1 B_p & \text{falls } U < -B_p, \\ m_1 U & \text{falls } |U| \leq B_p, \\ m_0(U - B_p) + m_1 B_p & \text{falls } U > B_p \end{cases} \quad (2.13)$$

besitzt; er ist durch eine Kombination aus Operationsverstärkern realisiert. Die dissipative Kopplung besteht aus einem zusätzlich an dem mit (A) bezeichneten Knoten aufgeprägten Strom der Größe $I_{cp} = (\alpha/R)(s - U_{C1})$ für das erste bzw. $\tilde{I}_{cp} = (\alpha/R)(s - \tilde{U}_{C1})$ für das zweite System. Das skalare Kopplungssignal ist für beide Systeme $s(t) = U_{C1}(t)$, so daß für das erste System $I_{cp} = 0$ A ist. Unidirektionale Kopplung wird ebenfalls mit Hilfe von Operationsverstärkern erreicht.

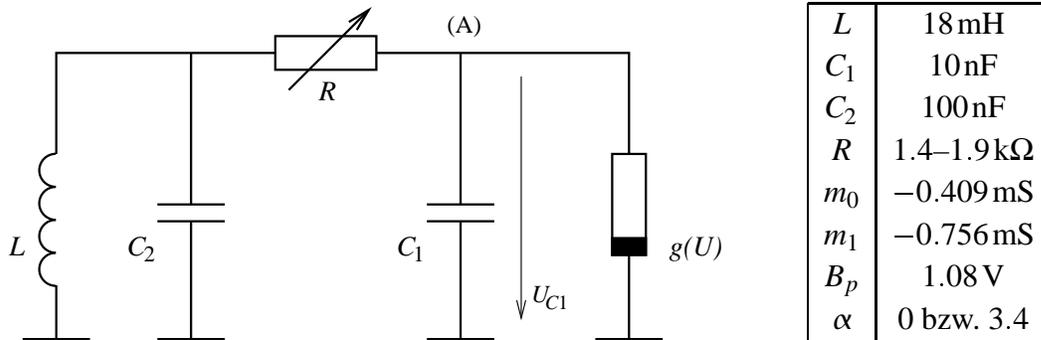


Abbildung 2.3: Schaltplan und Parameter der verwendeten Chuaoszillatoren. $g(U)$ ist der Leitwert des spannungsabhängigen Widerstandes mit der nichtlinearen Kennlinie (2.13).

In Abb. 2.4 wird der Fall demonstriert, daß keine Kopplung zwischen beiden Systemen besteht, also $\alpha = 0$ ist. In Abb. 2.4 a sind zwei mit dem in Abschnitt 4.6 beschriebenen digitalen Speicheroszilloskop aufgenommene Zeitreihen der Spannungen U_{C1} und \tilde{U}_{C1} des ersten bzw. zweiten Systems gezeigt; die Systeme sind nicht synchronisiert. Dies wird auch aus Abb. 2.4 b ersichtlich, in der die Spannungen $U_{C1}(t)$ und $\tilde{U}_{C1}(t)$ gegeneinander aufgetragen sind: Im Falle der Synchronisation würde sich wegen $U_{C1}(t) = \tilde{U}_{C1}(t)$ eine Diagonale ergeben. Dies ist in Abb. 2.5 b zu sehen, in der die gleiche Darstellung für den Fall eingeschalteter Kopplung ($\alpha = 3.4$) gezeigt ist. Die beiden Systeme synchronisieren, wie auch an den Zeitreihen (Abb. 2.5 a) zu erkennen ist.

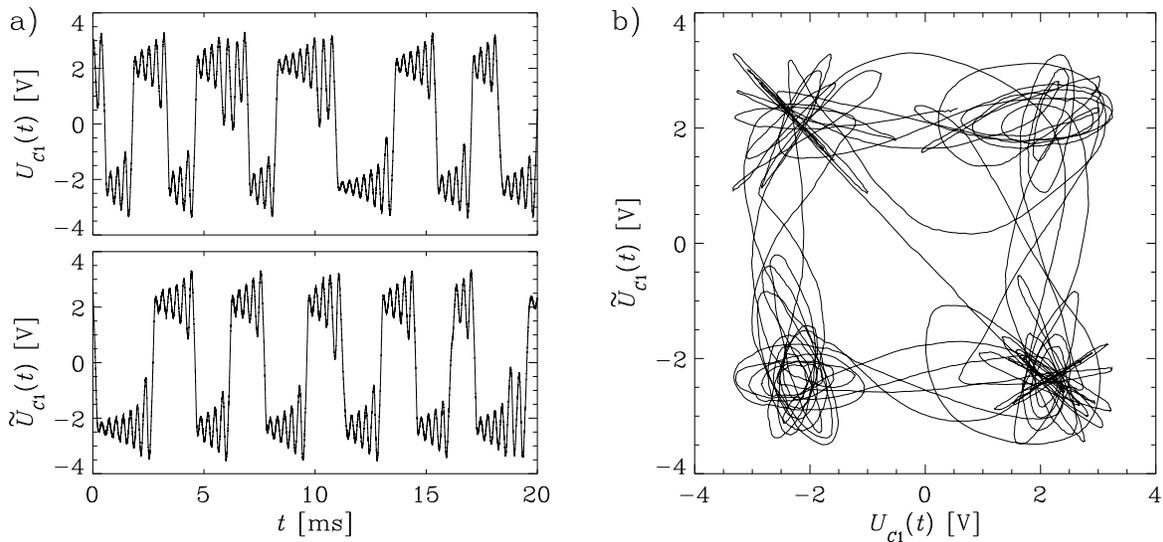


Abbildung 2.4: Ohne Kopplung ($\alpha = 0$) synchronisieren die beiden Chuaoszillatoren nicht.

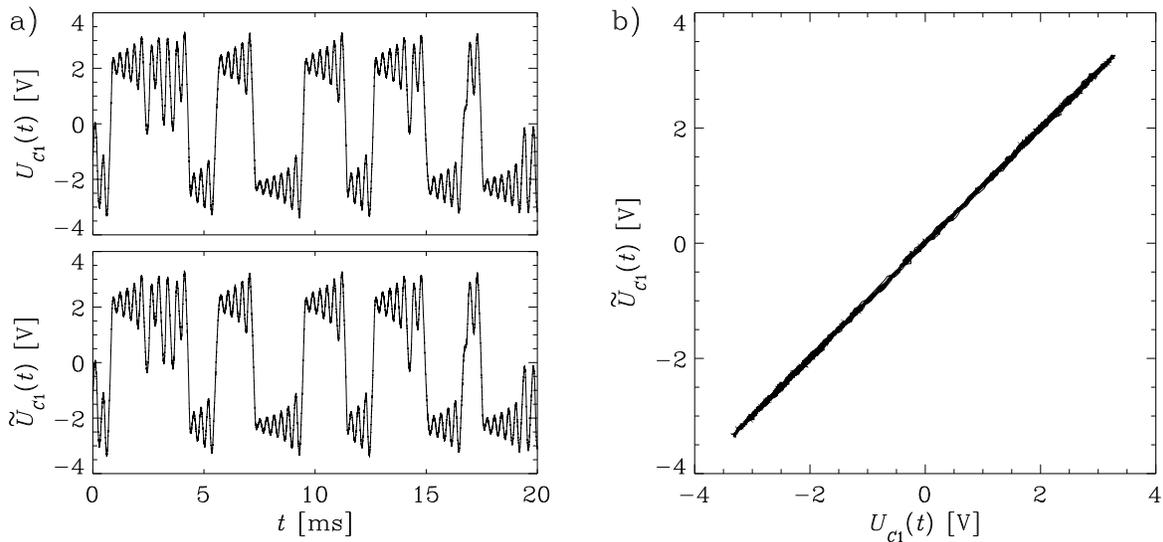


Abbildung 2.5: Wird die Kopplung eingeschaltet ($\alpha = 3.4$), so wird Synchronisation beobachtet.

Die dargestellte Anordnung lässt sich nun unter Benutzung des *chaos-modulation*-Schemas (siehe Abschnitt 2.5) zu Kommunikationszwecken einsetzen. Dazu wird als Kopplungssignal $s(t) = U_{C1}(t) + i(t)$ verwendet, wobei $i(t)$ das zu übertragende Informationssignal ist. Dadurch bekommt auch der erste Chuaoszillator einen Strom $I_{cp}(t) = (\alpha/R)i(t)$ aufgeprägt. Auf der Empfängerseite lässt sich durch

$$\hat{i}(t) = s(t) - \tilde{U}_{C1}(t)$$

eine Schätzung des Informationssignals erhalten; die Subtraktion wird wiederum mit Hilfe von Operationsverstärkern durchgeführt.

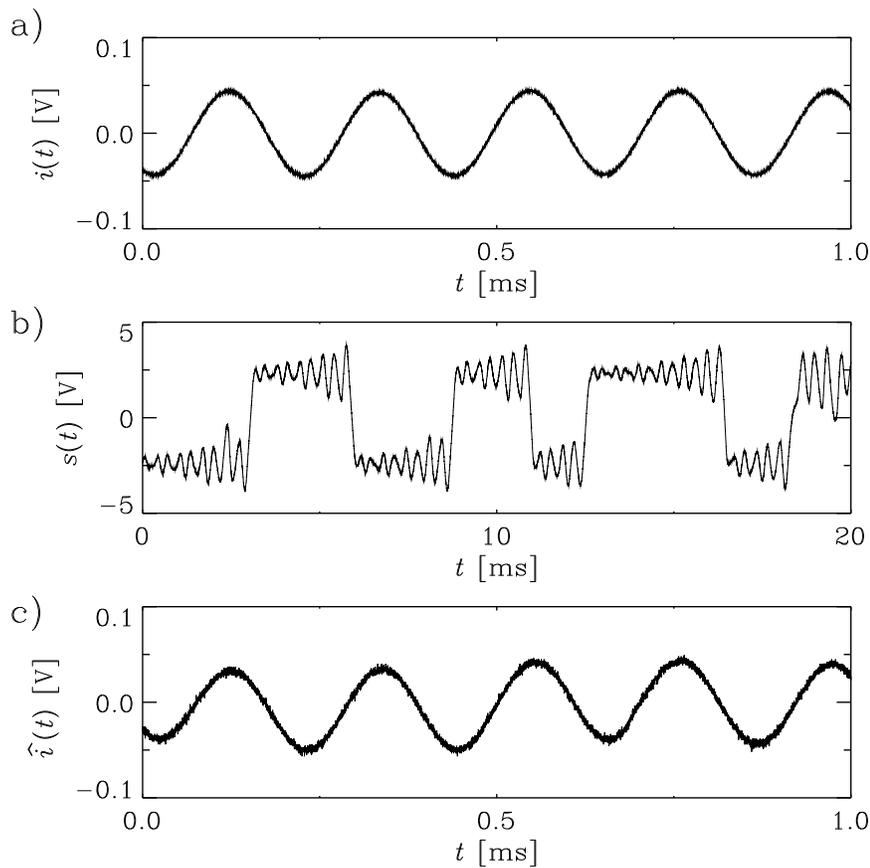


Abbildung 2.6: Informationssignal $i(t)$ (Abb. a), gesendetes Signal $s(t) = U_{C1}(t) + i(t)$ (Abb. b) und rekonstruiertes Signal $\hat{i}(t) = s(t) - \tilde{U}_{C1}(t)$ (Abb. c); zu beachten sind die unterschiedlichen Achsenskalierungen.

In Abb. 2.6 ist als Beispiel die Übertragung eines durch einen Funktionsgenerator erzeugten sinusförmigen Signals $i(t) = i_0 \sin(2\pi\nu t + \phi_0)$ der Frequenz $\nu \approx 4.7 \text{ kHz}$ demonstriert, die in der Größenordnung der höheren Frequenzen des chaotischen Trägersignals liegt. Dargestellt sind $i(t)$, das gesendete Signal $s(t)$ und das rekonstruierte Signal $\hat{i}(t)$. Weitere Einzelheiten sind in Ref. [40] zu finden.

Kapitel 3

Theorie der Halbleiterlaser

Im folgenden soll eine kurze Darstellung der Funktionsweise eines Halbleiterlasers gegeben werden; sie orientiert sich weitgehend an Ref. [3]. Nach einer Erläuterung der grundlegenden Prinzipien werden die semiklassischen Lasergleichungen beschrieben, die in Kapitel 4 erweitert werden, um den Einfluß der optischen Rückkopplung durch einen externen Resonator wiederzugeben.

3.1 Halbleiter als Lasermaterial

Ein Laser besteht im allgemeinen aus drei fundamentalen Komponenten: einem zur Ladungsträgerinversion geeignetem *aktiven Medium*, einem *optischen Resonator* und einer *Pumpe*, die dem System von außen Energie zuführt. Als aktives Medium eignen sich viele Materialien, unter anderem Gase (z. B. He/Ne), nichtleitende Festkörper (z. B. Nd:YAG), in Flüssigkeiten gelöste Farbstoffe und eben Halbleiter.

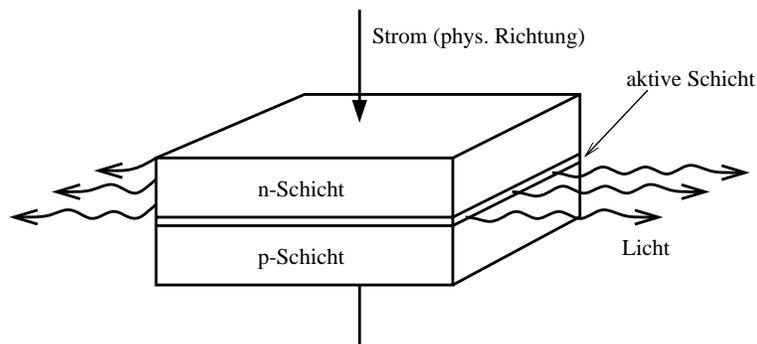


Abbildung 3.1: Aufbau einer Heterostruktur-Laserdiode; typische Abmessungen sind $300\mu\text{m} \times 200\mu\text{m} \times 100\mu\text{m}$, die aktive Schicht hat eine Dicke von etwa $0.2\mu\text{m}$ [3].

Praktisch haben heutzutage nur sogenannte *Laserdioden* Bedeutung, die aus einem p-n-Übergang bestehen, in den eine intrinsische (undotierte) aktive Schicht eingebracht ist (siehe Abb. 3.1). Den optischen Resonator bilden die durch Brechen an Kristallebenen geformten

Randflächen der aktiven Schicht, während ein von außen angelegter Strom als Pumpe fungiert.

Ein Halbleiter besitzt bei der Temperatur $T = 0\text{K}$ ein vollständig gefülltes Valenzband, während das nächsthöhere Leitungsband unbesetzt ist; in diesem Zustand ist er nichtleitend. Die Bandlücke zwischen beiden Bändern entspricht jedoch, im Gegensatz zu derjenigen von Isolatoren, einem Energiebetrag E_g im thermischen Bereich (also von der Größenordnung $k_B T$ bei Zimmertemperatur, wobei k_B die Boltzmannkonstante bezeichnet). Deshalb können bei Erwärmung oder durch sonstige – auch optische – Energiezufuhr Elektronen in das Leitungsband gehoben werden, so daß der Halbleiter leitend wird.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Niveau¹ der Energie E mit Elektronen besetzt ist, gehorcht der Fermi-Dirac-Statistik [11],

$$f(E) = \begin{cases} \left[\exp\left(\frac{E-E_F}{k_B T}\right) + 1 \right]^{-1} & \text{falls } E \text{ innerhalb eines Energiebandes liegt,} \\ 0 & \text{falls } E \text{ in einer verbotenen Zone liegt.} \end{cases}$$

Für $T = 0\text{K}$ sind alle Niveaus mit Energien E , die kleiner als die Fermienergie E_F sind, besetzt, während Niveaus mit $E > E_F$ unbesetzt bleiben. Bei Halbleitern liegt die Fermienergie in der Lücke zwischen Valenz- und Leitungsband [11].

Eine Verschiebung der Fermienergie wird durch Dotierung des Halbleiters erreicht. Bei *n-Dotierung* wird durch Einbau von Fremdatomen höherer Wertigkeit in das Halbleitergitter erreicht, daß sich einige Elektronen auf einem diskreten Energieniveau knapp unterhalb der unteren Kante des Leitungsbandes befinden, so daß die Fermienergie angehoben wird. Durch thermische Anregung können sie leicht in dieses hineingehoben werden und werden dadurch zu *Leitungselektronen*. Umgekehrt befindet sich bei *p-Dotierung* ein leeres diskretes Energieniveau knapp oberhalb der oberen Kante des Valenzbandes, was durch Einbau von Fremdatomen geringerer Wertigkeit erreicht wird. Nun können Elektronen aus dem Valenzband leicht auf das zusätzliche Energieniveau gehoben werden, wobei sie *Löcher* im Valenzband hinterlassen. Die Fermienergie wird in diesem Fall abgesenkt.

Werden ein p-dotierter und ein n-dotierter Halbleiter aneinandergesetzt, entsteht ein p-n-Übergang. Durch Diffusion gelangen Leitungselektronen von der n- zur p-Seite und Löcher von der p- zur n-Seite. Dadurch bilden sich Elektron-Loch-Paare, die nach kurzer Zeit unter Abgabe eines Energiebetrages rekombinieren, der gleich oder wenig größer als die Energiedifferenz E_g zwischen der Oberkante des Valenz- und der Unterkante des Leitungsbandes ist. Durch Elektronenmangel auf der n- und Elektronenüberschuß auf der p-Seite entsteht ein elektrisches Feld, das der Diffusion entgegenwirkt. Dynamisches Gleichgewicht herrscht, wenn die Fermienergien der n- und der p-Seite einander gleichen (siehe Abb. 3.2). An der

¹ Niveau ist hier nicht als diskretes Energieniveau zu verstehen.

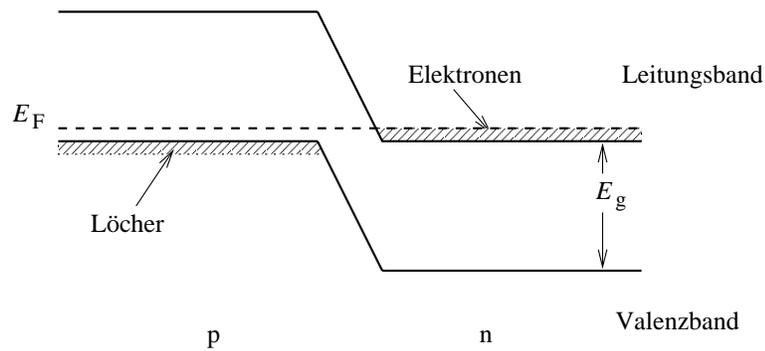


Abbildung 3.2: Der p-n-Übergang im thermischen Gleichgewicht; E_F ist die Fermienergie, E_g die Breite der Bandlücke.

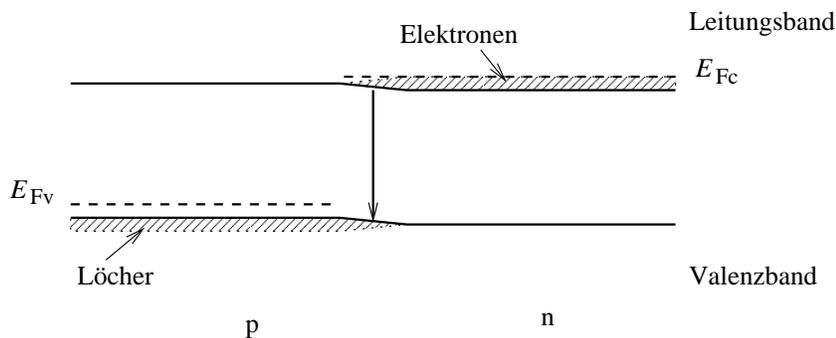


Abbildung 3.3: Der p-n-Übergang mit vorwärts angelegter Spannung; E_{Fv} und E_{Fc} sind die Quasi-Fermienergien.

Grenzschicht entsteht eine *Verarmungszone*, in der weder Leitungselektronen noch Löcher vorhanden sind.

Wird eine äußere Spannung derart an den p-n-Übergang angelegt, daß sie dem an der Grenzschicht herrschenden Feld entgegenwirkt, so entsteht die in Abb. 3.3 dargestellte Situation: Die Bandkanten gleichen sich aneinander an und aus der Verarmungszone wird eine *Raumladungszone*, in der sowohl Leitungselektronen als auch Löcher vorhanden sind, die unter Abgabe von Energie miteinander rekombinieren. Auf diese Weise kann ein elektrischer Strom von der n- zur p-Seite (physikalische Richtung) fließen. Da kein thermisches Gleichgewicht mehr vorliegt, existiert keine einheitliche Fermienergie mehr; stattdessen können unterschiedliche Quasi-Fermienergien für die beiden Seiten eingeführt werden. Entspricht die Bandlückenenergie $E_g = h\nu$ einer Frequenz ν im optischen Bereich, so kann bei der Rekombination ein Photon abgegeben werden, sofern direkte Halbleiter vorhanden sind [11].

3.2 Funktionsweise einer Laserdiode

Stimulierte Emission und Absorption treten im Halbleiter ebenfalls wie in jedem anderen Material auf. Im Falle der Absorption wird unter Vernichtung eines Photons ein Elektron-Loch-Paar erzeugt; dieser Prozeß überwiegt für kleine Pumpströme bei weitem die stimulierte Emission, da nur in einem sehr schmalen Bereich Rekombination möglich ist. Erhöhung des Pumpstroms verbreitert diesen Bereich, so daß ab einem gewissen Schwellwert optische Transparenz erreicht wird. Erhöht man den Pumpstrom nun noch weiter, so überwiegt die stimulierte Emission die Absorption, es wird *optischer Gewinn* erzielt, und Lasertätigkeit setzt ein.

Die ersten Laserdioden, die tatsächlich als Homostruktur realisiert wurden (also mit nur einem Halbleitermaterial), benötigten zum Erreichen der Lasertätigkeit Stromdichten von etlichen kA/cm^2 , die nur bei tiefen Temperaturen zu verwirklichen waren. Dies ist durch die äußerst geringe Breite ($\approx 0.01 \mu\text{m}$) der Raumladungszone bedingt. Abhilfe schafft eine Doppelheterostruktur, bei der zwischen p- und n-Material eine $\approx 0.2 \mu\text{m}$ breite Schicht eines Halbleitermaterials mit kleinerer Bandlücke, aber gleicher Kristallstruktur, eingefügt wird. Dies sorgt bei vorwärts angelegter Spannung für eine breitere Raumladungszone (aktive Zone, Abb. 3.4), wodurch Laserdioden ermöglicht werden, die bei Raumtemperatur mit kleinem Pumpstrom (typischerweise 10–100 mA) arbeiten. Da der Brechungsindex von Halbleitern mit abnehmender Bandlücke wächst, wirkt die Heterostruktur zugleich als optischer Wellenleiter.

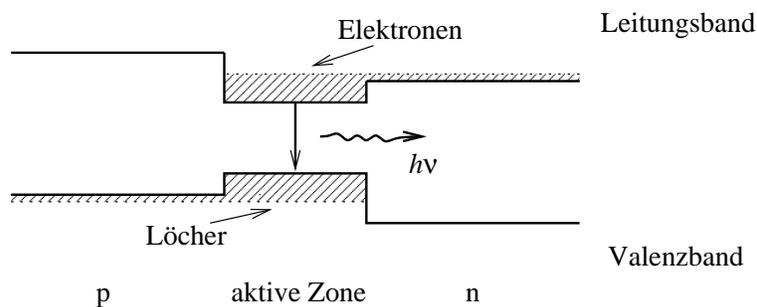


Abbildung 3.4: Heterostruktur mit vorwärts angelegter Spannung.

Wie bereits erwähnt, bilden die durch Brechen an Kristallebenen entstandenen Facetten des Halbleitermaterials die Spiegel des optischen Resonators. Die Fresnelschen Formeln liefern bei senkrechtem Lichteinfall für die Reflektivität

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2. \quad (3.1)$$

Mit einem Wert $n = 3.5$ für den Brechungsindex von GaAs ergibt sich eine Reflektivität $R \approx 0.309$, ein im Vergleich zu anderen Lasern sehr geringer Wert [81].

Auf weitere Feinheiten, wie z. B. Gewinn- bzw. Indexführung, oder Sonderformen, wie z. B. Quantenfilmlaser oder Laserdioden mit integriertem Gitter, soll hier nicht eingegangen werden. Einzelheiten sind beispielsweise Ref. [3] zu entnehmen.

3.3 Die semiklassischen Lasergleichungen

Ein Differentialgleichungssystem zur Beschreibung der Laserdynamik läßt sich auf unterschiedliche Weise gewinnen. Mit zunehmender Detailliertheit der Beschreibung ergeben sich die Bilanzgleichungen, die semiklassischen und die quantenmechanischen Lasergleichungen [25].

Bilanzgleichungen²: Sie werden aus einer Betrachtung der Vernichtungs- und Erzeugungsraten für Photonen gewonnen und erlauben es beispielsweise, Relaxationsoszillationen und durch Modulation der Pumpe verursachte Intensitätsschwankungen zu beschreiben, versagen jedoch, sobald es um Phasenbeziehungen geht.

Semiklassische Gleichungen: Zu ihrer Herleitung wird aus den klassischen Maxwellgleichungen eine Wellengleichung zur Beschreibung der elektrischen Feldstärke gewonnen, während eine quantenmechanische Beschreibung des verstärkenden Mediums Differentialgleichungen für die elektrische Polarisierung und die Inversion liefert.

Über drei Näherungen wird das System aus einer partiellen und zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen in ein System aus zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen umgewandelt: Die komplexe Feldgleichung für die elektrische Feldstärke und die reelle Materialgleichung für die Ladungsträgerinversion. Die durchgeführten Näherungen sind:

- *Slowly-varying-amplitude*-Näherung (SVAA, dt. langsam variierende Amplitude), für die davon ausgegangen wird, daß die zeitlichen Änderungen der Amplitude des Lichtfeldes sehr langsam im Vergleich zur Lichtfrequenz sind;
- *Rotating-wave*-Näherung (RWA, dt. rotierende Welle), für die angenommen wird, daß die Polarisierung und die Inversion nur von verallgemeinerten Kräften beeinflußt werden, denen sie auch folgen können;
- Adiabatische Elimination der Polarisierung, für die berücksichtigt wird, daß die Relaxationsrate der Polarisierung für Halbleiterlaser sehr viel größer ist als die Relaxationsrate der elektrischen Feldstärke bzw. der Inversion.

Durch die semiklassischen Lasergleichungen können auch Phänomene wie die Wechselwirkung zwischen verschiedenen Moden oder mit von außen injizierten Lichtfeldern beschrieben werden, nicht jedoch der Einfluß der spontanen Emission.

²Häufig findet auch die Bezeichnung *Ratengleichungen* Verwendung; in der englischsprachigen Literatur werden die semiklassischen Lasergleichungen jedoch ebenfalls als *rate equations* bezeichnet.

Quantenmechanische Gleichungen: Wird auch das Lichtfeld quantisiert, so lassen sich zusätzlich spontane Emission und der Übergang vom Laser- zum gewöhnlichen Lampenlicht beschreiben.

Da der Einfluß der Wechselwirkung des Laserlichtfeldes mit dem Lichtfeld in einem externen Resonator für das in dieser Arbeit behandelte System von entscheidender Bedeutung ist, werden im folgenden stets die semiklassischen Gleichungen zugrunde gelegt; die spontane Emission kann durch einen phänomenologischen Ansatz berücksichtigt werden (siehe Abschnitt 3.6). Die Gleichungen sollen hier nicht hergeleitet werden, stattdessen werden einige interessante Aspekte beleuchtet, insbesondere solche, die spezifisch für Halbleiterlaser sind. Die Beschreibung orientiert sich dabei, soweit nicht anders vermerkt, an den Referenzen [3, 81], die auch Herleitungen der semiklassischen Gleichungen enthalten.

Mit den für Halbleiterlaser üblichen Bezeichnungen ergeben sich die folgenden zwei Differentialgleichungen für die komplexe elektrische Feldstärke $E(t)$ einer longitudinalen Lasermode und die Besetzungszahl $N(t)$ des Leitungsbandes an einem festen Ort innerhalb des Lasers:

$$\frac{d}{dt}E(t) = \left\{ i\omega(N) + \frac{1}{2}[G(N) - \Gamma] \right\} E(t), \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt}N(t) = J - \gamma N(t) - G(N)|E(t)|^2. \quad (3.3)$$

Dabei bezeichnen Γ die Verlustrate der Photonen (inklusive aller Resonatorverluste), γ die Verlustrate der Ladungsträger im Leitungsband, $G(N)$ den optischen Gewinn pro Zeiteinheit, $\omega(N)$ die Kreisfrequenz der Lichtwelle und J den Pumpstrom in Elektronen pro Sekunde, so daß Je (mit der Elementarladung e) den Pumpstrom in Ampere ergibt. Die elektrische Feldstärke $E(t)$ wird allgemein derart normiert, daß $P(t) = |E(t)|^2$ die Anzahl der Photonen ist, die zum Zeitpunkt t an einer Stelle des Resonators zur betrachteten Lasermode beitragen; die Photonenzahl ist proportional zur Intensität.

Die Abhängigkeit des optischen Gewinns $G(N)$ und der Kreisfrequenz $\omega(N)$ von der Ladungsträgerzahl $N(t)$ verdient eine kurze Erklärung. Die Wechselwirkung zwischen Lichtfeld und Materie wird durch die frequenzabhängige komplexe Suszeptibilität

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) \quad (3.4)$$

beschrieben, wobei χ' und χ'' reell sind. Werden nichtlineare Effekte vernachlässigt, was bei den in Halbleiterlasern auftretenden Intensitäten legitim ist, so kann die Suszeptibilität als lineare Übertragungsfunktion zwischen der elektrischen Feldstärke $E(\omega)$ und der elektrischen Polarisation $P_{el}(\omega)$ angesehen werden [3],

$$P_{el}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) E(\omega), \quad (3.5)$$

mit der elektrischen Feldkonstante ε_0 .

Reale lineare Systeme sind kausal, so daß Real- und Imaginärteil der Suszeptibilität über die Kramers-Kronig-Relationen verknüpft sind [50]. Da die optische Weglänge von χ' und der optische Gewinn von χ'' abhängen, ergibt sich eine Kopplung zwischen diesen beiden Größen. In der weiteren Betrachtung wird angenommen, daß sich die Ladungsträgerzahl nur wenig ändert, so daß für den Brechungsindex und den optischen Gewinn lineare Abhängigkeiten von der Ladungsträgerzahl angenommen werden. Die Kopplung wird im allgemeinen über einen konstanten Faktor

$$\alpha = \frac{\partial \chi' / \partial N}{\partial \chi'' / \partial N} \quad (3.6)$$

berücksichtigt, der als Linienbreitenvergrößerungsfaktor, α -Faktor oder auch Henry's α bezeichnet wird (nach C. H. HENRY, der die Bedeutung dieses Faktors für die Erklärung der großen Linienbreite von Halbleiterlasern erkannt hat [32]). Aus der Abhängigkeit der Lichtfrequenz von der optischen Weglänge ergibt sich

$$\alpha = 2 \frac{\partial \omega / \partial N}{\partial G / \partial N}. \quad (3.7)$$

Im Gegensatz zu anderen Lasern, bei denen der α -Faktor vernachlässigbar klein ist, besitzen Halbleiterlaser einen α -Faktor in der Größenordnung 2 bis 6. Dies liegt darin begründet, daß die Übergänge zwischen kontinuierlichen Bändern – im Gegensatz zu diskreten Energieniveaus bei anderen Lasern – stattfinden, was zu einer Asymmetrie der Gewinnfunktion in Abhängigkeit von der Lichtfrequenz führt [81]. Der Zusammenhang zwischen dem α -Faktor und der Linienbreite von Halbleiterlasern wird in Abschnitt 3.6 erläutert.

Die Gewinnfunktion $G(N)$ wird um die Transparenzladungsträgerzahl N_{tr} linearisiert. Transparenz liegt vor, wenn der optische Gewinn null ist, da in diesem Fall die mittlere Photonenzahl im Medium konstant bleibt. Also folgt

$$G(N) = G_N [N(t) - N_{tr}], \quad (3.8)$$

wobei G_N als differentieller optischer Gewinn bezeichnet wird.

3.4 Fixpunkte und deren Stabilität

Die komplexe elektrische Feldstärke läßt sich schreiben als

$$E(t) = E_0(t)e^{i[\omega(N)t + \phi_0]}. \quad (3.9)$$

Im folgenden sollen Fixpunkte P^s und N^s der Photonenzahl $P(t) = E(t)E^*(t) = E_0^2(t)$ und der Ladungsträgerzahl $N(t)$ untersucht werden; E^* bezeichnet die zu E konjugiert komplexe Zahl. Eine konstante Photonenzahl entspricht einer Dauerstrichlösung (engl. *continuous wave, cw*)

$$E^{cw}(t) = E_0^s e^{i[\omega(N^s)t + \phi_0]} \quad (3.10)$$

mit konstanter Kreisfrequenz $\omega(N^s)$ und $E_0^s = \sqrt{P^s}$.

Eine Differentialgleichung für die Photonenzahl ergibt sich durch Einsetzen von (3.2) sowie der entsprechenden komplex konjugierten Gleichung in die Ableitung

$$\frac{d}{dt}P(t) = E^*(t)\frac{d}{dt}E(t) + E(t)\frac{d}{dt}E^*(t), \quad (3.11)$$

so daß, unter Hinzunahme von (3.3), die Fixpunkte des folgenden zweidimensionalen Systems reeller Differentialgleichungen,

$$\frac{d}{dt}P(t) = [G(N) - \Gamma]P(t), \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt}N(t) = J - \gamma N(t) - G(N)P(t), \quad (3.13)$$

zu untersuchen sind. Anzumerken ist, daß die semiklassischen Lasergleichungen bei Betrachtung der Photonenzahl $P(t)$ in die Bilanzgleichungen übergehen, da die Phase der elektrischen Feldstärke aus den Gleichungen verschwindet. Als Fixpunkte ergeben sich

$$P_1^s = 0, \quad N_1^s = \frac{J}{\gamma}$$

sowie, mit $G(N) = \Gamma$ und unter Verwendung von (3.8),

$$P_2^s = \frac{J - \gamma N_2^s}{\Gamma}, \quad N_2^s = \frac{\Gamma}{G_N} + N_{tr}.$$

Eine lineare Stabilitätsanalyse (siehe Anhang A) ergibt, daß der Fixpunkt (P_1^s, N_1^s) für $J < J_{th}$ mit

$$J_{th} = \gamma \left(\frac{\Gamma}{G_N} + N_{tr} \right) \quad (3.14)$$

ein stabiler Knoten ist, während er für $J > J_{\text{th}}$ zum (instabilen) Sattel wird. Der zweite Fixpunkt (P_2^s, N_2^s) dagegen ist für $J < J_{\text{th}}$ ein Sattel und wird für $J > J_{\text{th}}$ stabil; je nach Größe von J , Γ und γ handelt es sich dann entweder um einen stabilen Knoten oder um einen stabilen Fokus.

Das Verhalten des Lasers ist also abhängig von der Größe des Pumpstroms J . Ist er kleiner als der *Schwellstrom* (engl. *threshold current*) J_{th} , baut sich kein Lichtfeld auf, mit wachsendem Strom steigt jedoch die Zahl der Ladungsträger im oberen Niveau; ist er größer als der Schwellstrom, wächst die Photonenzahl proportional mit dem Strom, während die Ladungsträgerzahl des oberen Niveaus konstant bleibt. Diese Ladungsträgerzahl des einzelnen (engl. *solitary*) Lasers wird im folgenden mit

$$N_{\text{sol}} = \frac{\Gamma}{G_N} + N_{\text{tr}} \quad (3.15)$$

bezeichnet. Mit den in Tab. 3.1 angegebenen typischen Parametern liefert Gl. (3.14) einen Schwellstrom von ≈ 25 mA. Eine experimentell gemessene Intensitäts-Pumpstrom-Kennlinie ist in Abb. 4.14 dargestellt. Handelt es sich bei dem zweiten Fixpunkt um einen

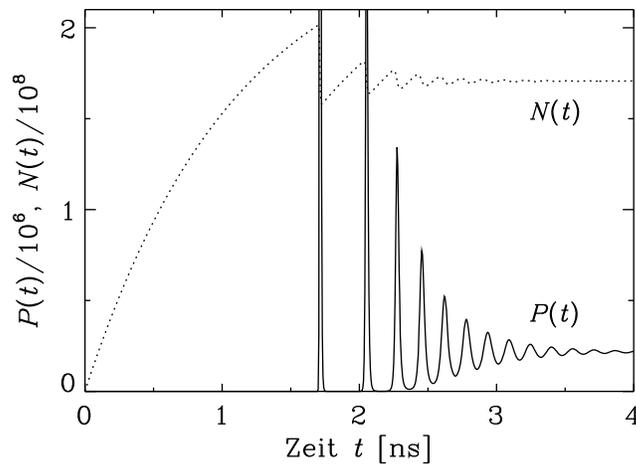


Abbildung 3.5: Einschwingvorgang und Relaxationsoszillationen der Photonenzahl $P(t)$ und der Ladungsträgerzahl $N(t)$ (Ergebnisse der numerischen Simulation).

Fokus, werden beim Einschalten des Lasers exponentiell abklingende Relaxationsoszillationen beobachtet. Abbildung 3.5 zeigt den Einschwingvorgang eines Lasers, der zur Zeit $t = 0$ s mit einem Pumpstrom der Größe $J = 1.5J_{\text{th}}$ eingeschaltet wird; dafür wurden die Differentialgleichungen (3.12) und (3.13) mittels einer Runge-Kutta-Fehlberg-Routine [67] integriert, es wurden die in Tab. 3.1 angegebenen, für Halbleiterlaser typischen Parameter verwendet. Nach Gleichung (A.10) ergibt sich mit den verwendeten Parametern eine Relaxationsfrequenz von $\nu_{\text{rel}} \approx 6.5$ GHz, die auch die numerische Simulation liefert (siehe Abb. 3.5).

G_N	$2.142 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$	differentieller optischer Gewinn
N_{tr}	1.54×10^8	Transparenzladungsträgerzahl
Γ	0.357 ps^{-1}	Photonenverlustrate
γ	0.909 ns^{-1}	Ladungsträgerverlustrate
J	$2.32 \times 10^{17} \text{ s}^{-1}$	Pumpstrom

Tabelle 3.1: Für die numerische Berechnung der Relaxationsoszillationen verwendete Parameter, aus Referenz [82].

3.5 Aufspalten der Feldgleichung

Nun sollen wieder die semiklassischen Gleichungen (3.2) und (3.3) betrachtet werden. Für die folgenden Betrachtungen wird es sich als zweckmäßig erweisen, die komplexe Gleichung (3.2) in zwei reelle Gleichungen aufzuspalten. Dabei wird die elektrische Feldstärke in der Form

$$E(t) = E_0(t)e^{i[\omega_0 t + \phi(t)]} \quad (3.16)$$

geschrieben, wobei

$$\omega_0 = \omega(N_{\text{sol}}) \quad (3.17)$$

die Kreisfrequenz der elektrischen Feldstärke im Gleichgewichtszustand bezeichnet, während $\phi(t)$ ein sich im Vergleich zu $\omega_0 t$ langsam ändernder Phasenanteil ist. Eine weitere Vereinfachung bringt der Übergang von der Besetzungszahl $N(t)$ des oberen Niveaus zur Differenz

$$n(t) = N(t) - N_{\text{sol}}. \quad (3.18)$$

Die bisher noch nicht näher behandelte Kreisfrequenz $\omega(N)$ wird nun um N_{sol} linearisiert; unter Benutzung der Beziehung (3.7) für den α -Faktor ergibt sich

$$\omega(N) = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha G_N [N(t) - N_{\text{sol}}]. \quad (3.19)$$

Ferner liefert die linearisierte Gleichung (3.8) für den optischen Gewinn unter Benutzung von (3.15)

$$G(n + N_{\text{sol}}) = \Gamma + G_N n(t). \quad (3.20)$$

Mit diesen Bezeichnungen und Beziehungen ergibt sich aus (3.2) und (3.3) das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}E(t) = \left\{ i \left[\omega_0 + \frac{1}{2}\alpha G_N n(t) \right] + \frac{1}{2}G_N n(t) \right\} E(t), \quad (3.21)$$

$$\frac{d}{dt}n(t) = (p-1)J_{\text{th}} - \gamma n(t) - [\Gamma + G_N n(t)]|E(t)|^2, \quad (3.22)$$

wobei $p = J/J_{\text{th}}$ das Verhältnis von Pump- zu Schwellstrom darstellt. Ableiten des Ausdrucks (3.16) liefert

$$\frac{d}{dt}E(t) = \left[\frac{d}{dt}E_0(t) \right] e^{i[\omega_0 t + \phi(t)]} + i \left[\omega_0 + \frac{d}{dt}\phi(t) \right] E(t), \quad (3.23)$$

Gleichsetzen mit (3.21) und Aufspalten in Real- und Imaginärteil liefert je eine Differentialgleichung für die Amplitude und die sich langsam ändernde Phase von $E(t)$. Zusammen mit der Materialgleichung (3.22) ergibt sich also ein System von drei reellen Differentialgleichungen,

$$\frac{d}{dt}E_0(t) = \frac{1}{2}G_N n(t)E_0(t), \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{1}{2}\alpha G_N n(t), \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dt}n(t) = (p-1)J_{\text{th}} - \gamma n(t) - [\Gamma + G_N n(t)]E_0^2(t). \quad (3.26)$$

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde, sind Relaxationsoszillationen einer einzelnen Laserdiode stets gedämpft, klingen also mit der Zeit ab. Das Differentialgleichungssystem (3.24), (3.25) und (3.26) ist daher, obwohl dreidimensional, nicht in der Lage, chaotische Dynamik hervorzubringen. Die Phase $\phi(t)$ taucht in den beiden Gleichungen für $E_0(t)$ und $n(t)$ nicht auf. Ihre Änderung ist proportional zu $n(t)$ und verschwindet daher, wenn der Gleichgewichtswert $n^s = 0$ erreicht ist.

Die Situation ändert sich jedoch, wenn die Dynamik der Laserdiode von außen beeinflusst wird. Eine Möglichkeit dazu ist, die Amplitude des Pumpstroms zu modulieren. Die Dynamik läßt sich durch die Bilanzgleichungen beschreiben, durch Anregung von Relaxationsoszillationen treten Periodenverdopplungen und Chaos auf [45]. Während Periodenverdopplungen experimentell beobachtet wurden [13, 74], war es bisher noch nicht möglich, mit pumpstrommodulierten Laserdioden experimentell in das chaotische Regime vorzudringen.

Eine weitere Möglichkeit, die Dynamik zu beeinflussen, ist die Injektion kohärenten Lichtes in die Laserdiode. Wegen der geringen Facettenreflektivitäten und der starken Amplituden-Phasen-Kopplung (bedingt durch den hohen Wert des α -Faktors) reagieren Laserdioden sehr empfindlich auf derartige äußere Einflüsse. Dies läßt sich nutzen, indem Licht einer Laserdiode geringer Linienbreite in eine (evtl. mehrmodige) Laserdiode höherer Linienbreite injiziert wird. Bei nicht zu großem Frequenzunterschied kann Frequenzmitnahme erreicht werden, so daß die Linienbreite der getriebenen auf den Wert der treibenden Laserdiode verringert und unerwünschte Nebenmoden unterdrückt werden. In diesem Zusammenhang wird von *Injektionsstabilisierung* gesprochen, Anwendungen existieren z. B. in der Spektroskopie [70]. Seit einiger Zeit ist bekannt, daß bei Erhöhung des Frequenzunterschiedes zwischen beiden Laserdioden oder der Amplitude des injizierten Signals Periodenver-

dopplungen und Chaos auftreten können; derartige Phänomene sind Gegenstand theoretischer und experimenteller Untersuchungen [6, 74, 42].

Optische Rückkopplung durch einen externen Resonator stellt eine dritte Möglichkeit äußerer Beeinflussung dar. Eine detaillierte Behandlung der Dynamik solcher Systeme findet sich in Kapitel 4.

3.6 Spontane Emission und Linienbreite

Wurde bisher der Einfluß der spontanen Emission gänzlich vernachlässigt, soll er nun über Langevinkräfte in den semiklassischen Lasergleichungen berücksichtigt werden. Die Darstellung orientiert sich an Ref. [32]. Das komplexe elektrische Feld einer Mode an einer Stelle des Resonators wird durch

$$E(t) = \sqrt{P(t)} e^{i[\omega_0 t + \phi(t)]}$$

beschrieben, wobei $P(t)$ die momentane Photonenzahl ist. Der spontanen Emission eines Photons zum Zeitpunkt t_i entspricht ein komplexes elektrisches Feld

$$E_{\text{sp}}(t_i) = e^{i\theta(t_i)}$$

mit Betrag 1 (dies entspricht einer Photonenzahl $|E_{\text{sp}}(t_i)|^2 = 1$) und zufälliger Phase $\theta(t_i)$. Für die Lasergleichungen werden nun die Änderungen $\Delta P(t_i)$ und $\Delta\phi(t_i)$ der Photonenzahl und der Phase von $E(t)$ benötigt (siehe Abb. 3.6). Zufällige Schwankungen der Ladungsträgerzahl $n(t)$ sind nur bei Halbleiterlasern mit sehr geringen Schwellströmen von Bedeutung [81].

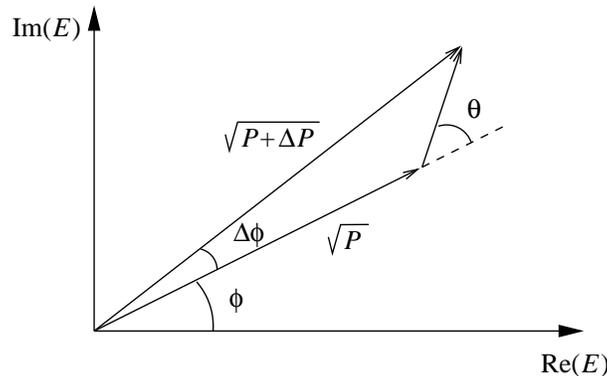


Abbildung 3.6: Änderung von Phase und Amplitude der elektrischen Feldstärke $E(t)$ durch spontane Emission.

Aus dem Sinussatz ergibt sich (mit $P(t) \gg 1$)

$$\Delta\phi(t_i) \approx \frac{\sin \theta(t_i)}{\sqrt{P(t_i)}}, \quad (3.27)$$

aus dem Kosinussatz folgt

$$\Delta P(t_i) = 1 + 2\sqrt{P(t_i)} \cos \theta(t_i). \quad (3.28)$$

Somit folgt für die Fluktuationen der Phase

$$\Delta \phi(t) = F_\phi(t) \approx \sum_i \delta(t - t_i) \frac{\sin \theta(t_i)}{\sqrt{P(t_i)}} \quad (3.29)$$

und für die Fluktuationen der Intensität

$$\Delta P(t) = \sum_i \delta(t - t_i) + F_P(t), \quad (3.30)$$

$$\text{mit } F_P(t) = \sum_i \delta(t - t_i) 2\sqrt{P(t_i)} \cos \theta(t_i). \quad (3.31)$$

Mit der mittleren Rate der spontanen Emission,

$$R = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \sum_i \delta(t - t_i),$$

folgt $\langle \Delta \phi(t) \rangle_t = \langle F_\phi(t) \rangle_t = 0$, $\langle \Delta P(t) \rangle_t = R$ und $\langle F_P(t) \rangle_t = 0$; dabei bezeichnet $\langle \cdot \rangle_t$ zeitliche Mittelung. Ferner folgt

$$\langle F_\phi(t) F_\phi(t') \rangle_t = \frac{R}{2\langle P(t) \rangle_t} \delta(t - t'), \quad (3.32)$$

$$\langle F_P(t) F_P(t') \rangle_t = 2R \langle P(t) \rangle_t \delta(t - t'), \quad (3.33)$$

$$\langle F_P(t) F_\phi(t') \rangle_t = 0. \quad (3.34)$$

Zufallsgrößen der Form $F_P(t)$ und $F_\phi(t)$ mit diesen Eigenschaften werden als Langevinkräfte bezeichnet. Unter der Annahme, daß die Ereignisse der spontanen Emission einzelner Photonen statistisch unabhängig voneinander sind, sind $F_P(t)$ und $F_\phi(t)$ normalverteilt. Die Rate der spontanen Emission kann durch

$$R = C_{\text{sp}} \gamma N(t) \quad (3.35)$$

ausgedrückt werden, mit einem typischen Wert $C_{\text{sp}} = 10^{-5}$ für den Faktor der spontanen Emission [81].

Aus den Differentialgleichungen (3.12) und (3.25) ergeben sich also die *stochastischen Differentialgleichungen*

$$\frac{d}{dt} P(t) = G_N n(t) P(t) + R + F_P(t), \quad (3.36)$$

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = \frac{1}{2} \alpha G_N n(t) + F_\phi(t). \quad (3.37)$$

Wegen

$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{d}{dt}E_0^2(t) = 2E_0(t)\frac{d}{dt}E_0(t)$$

ergibt sich als Differentialgleichung der Amplitude des elektrischen Feldes

$$\frac{d}{dt}E_0(t) = \frac{1}{2}G_N n(t)E_0(t) + \frac{R}{2E_0(t)} + \frac{F_P(t)}{2E_0(t)}. \quad (3.38)$$

Spontane Emission beeinflußt die Linienbreite einer Laserdiode in zweierlei Weise: Zum einen bewirken die abrupten Änderungen $\Delta\phi(t_i)$ der Phase eine Aufweitung der Frequenz $\omega(t) = d\phi(t)/dt$. Dieser Effekt reicht jedoch nicht aus, um die Linienbreite von Halbleiterlasern zu erklären, die deutlich größer ist als die anderer Lasertypen (typische Werte für Halbleiterlaser liegen im Bereich 10–100 MHz [3]). HENRY fand die Erklärung in der Amplituden-Phasen-Kopplung über den in Abschnitt 3.3 eingeführten α -Faktor: Eine abrupte Änderung $\Delta P(t_i)$ der Intensität führt zu Relaxationsoszillationen, durch die der Gleichgewichtszustand wiederhergestellt wird. Die damit verbundene Oszillation der Ladungsträgerzahl sorgt für eine Änderung des optischen Gewinns, mit der wegen (3.7) eine Änderung der Lichtfrequenz verbunden ist [32]. Dieser Mechanismus, der schon vor HENRY bekannt war, führt zu einem Faktor $(1 + \alpha)^2$ in der Formel für die Linienbreite. Bei anderen Lasertypen ist $\alpha \approx 0$; diese Tatsache führte dazu, daß der Wert des α -Faktors bei Halbleiterlasern lange unterschätzt wurde [32].

Kapitel 4

Halbleiterlaser mit externem Resonator

Seit einigen Jahren sind Laserdioden mit externen optischen Resonatoren Gegenstand intensiver Untersuchungen [81]. Abbildung 4.1 zeigt schematisch den Aufbau eines solchen Systems: Von der Laserdiode emittiertes Licht wird an einem Spiegel so reflektiert, daß ein Teil des Lichtes zeitverzögert wieder in den Laserresonator gelangt. Durch die im Vergleich mit anderen Lasertypen recht geringe Facettenreflektivität stellt eine Laserdiode ein verhältnismäßig offenes System dar, das empfindlich auf derartige Einflüsse reagiert. Das starke Interesse an Laserdioden mit externen optischen Resonatoren läßt sich auf zwei Arten erklären: Einerseits treten physikalisch interessante Phänomene wie dynamische Instabilitäten und Änderungen der spektralen Eigenschaften auf, die zu einem großen Teil noch unverstanden sind. Andererseits spielen optische Rückkopplungen, z. B. durch Reflexionen an Glasfaserenden oder CD-Beschichtungen, in technischen Anwendungen von Laserdioden eine Rolle. Dort sind Intensitätsfluktuationen und Vergrößerungen der Linienbreite oftmals äußerst störend, so daß nach Methoden gesucht wird, derartige Effekte zu vermeiden [24]. Weiterhin lassen sich durch kontrollierte Rückkopplung mit einem optischen Gitter die Linienbreite von Laserdioden verringern und die Wellenlänge des emittierten Lichtes beeinflussen; dies wird beispielsweise in der Spektroskopie ausgenutzt [70].

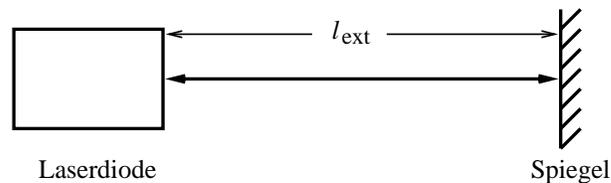


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung einer Laserdiode mit externem optischen Resonator.

Durch die Wechselwirkung des elektrischen Feldes in der Laserdiode mit dem Feld im externen Resonator ergeben sich sogenannte *externe Resonatormoden*, die einer konstruktiven Überlagerung beider Felder entsprechen. Dieser Ausdruck darf nicht dahingehend mißverstanden werden, daß es sich um Eigenmoden des externen Resonators handelt: Die Wechselwirkung beider Felder ist entscheidend. Auf die externen Resonatormoden und ihre Stabilitätseigenschaften wird in Abschnitt 4.3 eingegangen.

In Abhängigkeit vom Intensitätsanteil ρ des emittierten Lichtes, der wieder in den Laserresonator injiziert wird und dort zu einer Lasermode beiträgt, lassen sich fünf Bereiche unterschiedlicher Dynamik unterscheiden [81]:

- I. ($\rho < -70$ dB) Es existiert nur eine externe Resonatormode; in diesem Bereich kann eine Verringerung der Linienbreite der Laserdiode erreicht werden.
- II. (-70 dB $< \rho < -45$ dB) Es existieren mehrere externe Resonatormoden, zwischen denen das System durch Rauschen bedingt hin- und herspringt.
- III. Dieser Bereich zwischen den Bereichen II und IV existiert nur in DFB-Lasern (engl. *distributed feedback*, siehe z. B. [3]); das System emittiert auf einer stabilen externen Resonatormode.
- IV. (-45 dB $< \rho < -10$ dB) Durch Anregung von Relaxationsoszillationen findet eine sehr starke Vergrößerung der Linienbreite auf bis zu 25 GHz statt. In diesem Bereich, der auch als Kohärenzkollaps bezeichnet wird [46], wurden experimentell chaotische Attraktoren gefunden [75, 54].
- V. ($\rho > -10$ dB) Dieser Bereich wird üblicherweise nur bei Laserdioden mit Antireflexbeschichtung erreicht und ist durch stabile Emission auf einer Mode gekennzeichnet.

Anzumerken ist, daß die Grenzen zwischen den Bereichen außer vom Lasertyp stark vom angelegten Pumpstrom abhängig sind.

4.1 Low Frequency Fluctuations

Ein besonders auffälliges Phänomen, das später noch im Detail untersucht wird (siehe Abschnitt 4.4), tritt für Pumpströme um den Schwellwert und mittlere Anteile ρ des zurückgekoppelten Lichtes auf: In unregelmäßigen Abständen von einigen zehn bis hundert Nanosekunden bricht die emittierte Intensität abrupt zusammen, um anschließend langsam wieder ihren alten Wert zu erreichen. Abbildung 4.2 zeigt eine experimentell aufgenommene Zeitreihe, an der diese sogenannten *low frequency fluctuations* (LFF, dt. *niedrigfrequente Fluktuationen*) zu beobachten sind; auf den experimentellen Aufbau wird in Abschnitt 4.6 eingegangen. Niedrig sind die dabei auftretenden Frequenzen im MHz-Bereich verglichen mit denen der Relaxationsoszillationen, die typischerweise einige GHz betragen. Dieses Phänomen ist in den letzten Jahren sehr kontrovers diskutiert worden. Die zentrale Frage lautet bis heute: Ist die Dynamik der LFF hauptsächlich stochastischen Ursprungs, oder liegt ihr ein Determinismus zugrunde?

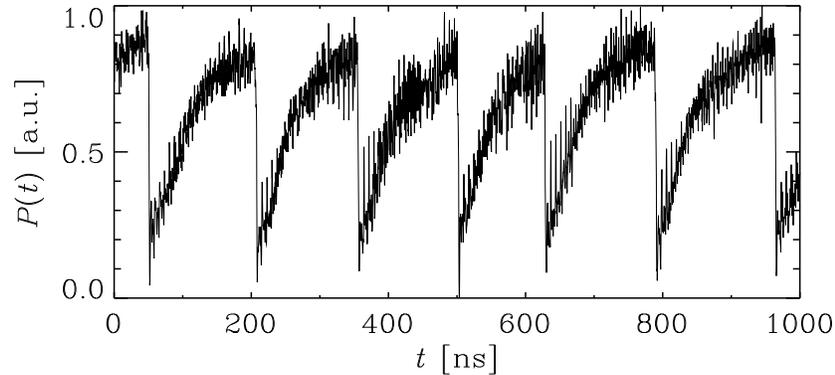


Abbildung 4.2: Experimentell mit Hilfe von Photodiode und digitalem Speicheroszilloskop aufgenommene Zeitreihe, an der *low frequency fluctuations* (LFF) zu beobachten sind. Aufgetragen ist die Intensität $P(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t .

Die kurzen Zeitskalen im GHz-Bereich, auf denen die Dynamik stattfindet, erschweren eine direkte Analyse der gemessenen Signale, etwa mit Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse [38]. Stattdessen werden die Meßdaten üblicherweise mit Ergebnissen von Modellrechnungen verglichen. Eine am Experiment überprüfbare Vorhersage von Modellen ist beispielsweise die Verteilung der zeitlichen Abstände zweier aufeinanderfolgender Intensitätseinbrüche. Eine wichtige Rolle in nahezu allen Erklärungsversuchen spielen die Lang-Kobayashi-Modellgleichungen, die im folgenden Abschnitt beschrieben werden, sowie die externen Resonatormoden, auf die in Abschnitt 4.3 eingegangen wird.

Die Vertreter stochastischer Modelle betonen die Wichtigkeit von Rauschtermen in diesen Gleichungen, etwa den in Abschnitt 3.6 eingeführten zur Beschreibung der spontanen Emission. HENRY und KAZARINOV gingen davon aus, daß das System auf einer stabilen externen Resonatormode emittiert, aus deren Einzugsbereich es jedoch durch Rauschen hinausbefördert werden kann, wodurch es zum Intensitätseinbruch kommt [31, 33]. MØRK et al. erklärten die LFF durch Übergänge zwischen zwei bistabilen Zuständen hoher bzw. niedriger Intensität [53, 80].

Im Gegensatz dazu stehen die Vertreter deterministischer Ansätze. In einer Arbeit von SACHER et al. wurde von experimentellen Meßergebnissen auf das Vorhandensein einer Typ-II-Intermittenz geschlossen [75]. SANO ging von rein deterministischen Modellgleichungen aus und erklärte die Intensitätseinbrüche als kriseninduzierte Phänomene [76, 82]. Vorhersagen dieses Modells, das in Abschnitt 4.4 näher beschrieben wird, konnten experimentell verifiziert werden [21, 20].

4.2 Die Lang-Kobayashi-Modellgleichungen

LANG und KOBAYASHI bestimmten 1980 Modellgleichungen für den Halbleiterlaser mit externem Resonator [43], die auch heute noch als geeignete Beschreibung der Dynamik *einer* longitudinalen Lasermode bei nicht zu starker Rückkopplung gelten [54, 3, 81].

In der folgenden Herleitung, die sich an Referenz [81] orientiert, wird die spontane Emission zunächst wieder vernachlässigt. Die Reflektivität der dem externen Resonator zugewandten Laserfacette sei R_{fac} , die des externen Resonatorspiegels R_{ext} , wobei jeweils das Verhältnis von eingestrahelter zu reflektierter *Intensität* gemeint ist (siehe Abb. 4.3). Alle sonstigen Verluste im externen Resonator seien in R_{ext} berücksichtigt. Die Umlaufzeit in einem externen Resonator der Länge l_{ext} beträgt $\tau = 2l_{\text{ext}}/c$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Ist $E_{\text{ref}}(t)$ die elektrische Feldstärke einer in der Laserdiode umlaufenden Welle direkt nach der Reflexion an der Facette, so ist

$$E_{\text{tr}}(t) = \frac{\sqrt{1 - R_{\text{fac}}}}{\sqrt{R_{\text{fac}}}} E_{\text{ref}}(t)$$

die Feldstärke im externen Resonator direkt nach dem Durchgang durch die Facette (siehe Abb. 4.3). Nach Reflexion und Wiedereintritt in die Laserdiode besteht an der rechten Facette ein zusätzliches Feld

$$E_{\text{ext}}(t) = (1 - R_{\text{fac}}) \sqrt{\frac{R_{\text{ext}}}{R_{\text{fac}}}} E_{\text{ref}}(t - \tau). \quad (4.1)$$

Mehrfache Reflexionen im externen Resonator werden im Lang-Kobayashi-Modell vernachlässigt. Dies wird durch die Beschränkung auf den Fall schwacher Rückkopplung gerechtfertigt.

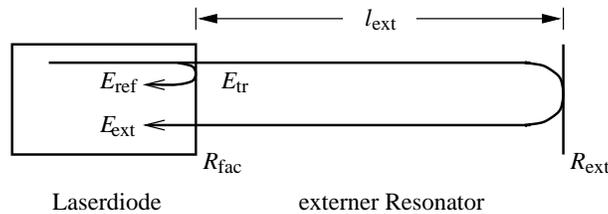


Abbildung 4.3: Zur Veranschaulichung der Herleitung von Gl. (4.1).

Wird eine im Resonator der Laserdiode laufende Wellenfront der Umlaufperiode τ_{in} betrachtet, so folgt für die *Rückkopplungsrate*

$$\kappa = \frac{1 - R_{\text{fac}}}{\tau_{\text{in}}} \sqrt{\frac{R_{\text{ext}}}{R_{\text{fac}}}}. \quad (4.2)$$

Der Zusammenhang mit dem am Anfang dieses Kapitels definierten zurückgekoppelten Intensitätsanteil ist $\rho = (\kappa\tau_{\text{in}})^2$. Als modifizierte Differentialgleichung für $E(t)$ läßt sich mit (3.2) schließlich

$$\frac{d}{dt}E(t) = \left\{ i\omega(N) + \frac{1}{2}[G(N) - \Gamma] \right\} E(t) + \kappa E(t - \tau) \quad (4.3)$$

formulieren [3, 81]. Dabei handelt es sich um eine *Delaydifferentialgleichung* (siehe Abschnitt 2.3).

Auch Gl. (4.3) läßt sich gemäß der in Abschnitt 3.5 durchgeführten Prozedur in zwei reelle Differentialgleichungen aufspalten. Unter Benutzung von

$$\begin{aligned} E(t - \tau) &= E_0(t - \tau) \exp\{i[\omega_0(t - \tau) + \phi(t - \tau)]\} \\ &= E_0(t - \tau) \exp\{-i[\omega_0\tau + \phi(t) - \phi(t - \tau)]\} \exp\{i[\omega_0t + \phi(t)]\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

und der Eulerschen Formel ergibt sich zusammen mit der unveränderten Gl. (3.26) und unter Einbeziehung der mittleren Rate der spontanen Emission (siehe Abschnitt 3.6, die Zufallsterme F_P und F_ϕ werden nicht berücksichtigt) ein dreidimensionales Delaydifferentialgleichungssystem mit zwei zeitverzögerten Variablen, E_0 und ϕ :

$$\frac{d}{dt}E_0(t) = \frac{1}{2}G_{NN}(t)E_0(t) + \kappa E_0(t - \tau) \cos[\omega_0\tau + \eta(t)] + \frac{C_{\text{sp}}\mathcal{Y}[n(t) + N_{\text{sol}}]}{2E_0(t)}, \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{1}{2}\alpha G_{NN}(t) - \kappa \frac{E_0(t - \tau)}{E_0(t)} \sin[\omega_0\tau + \eta(t)], \quad (4.6)$$

$$\frac{d}{dt}n(t) = (p - 1)J_{\text{th}} - \gamma n(t) - [\Gamma + G_{NN}(t)]E_0^2(t), \quad (4.7)$$

wobei

$$\eta(t) = \phi(t) - \phi(t - \tau)$$

die Phasendifferenz zwischen momentaner und durch den externen Resonator zeitverzögerter Feldstärke bezeichnet.

4.3 Fixpunkte

Im folgenden sollen die Fixpunkte einer Laserdiode mit externem Resonator untersucht werden, da sie in Kapitel 5 noch eine Rolle spielen werden. Dabei wird der Einfluß der spontanen Emission vernachlässigt ($C_{\text{sp}} = 0 \text{ s}^{-1}$). Gesucht sind Dauerstrich-(cw-)Lösungen mit

$$E^{\text{cw}}(t) = E_0^{\text{s}} e^{i[\omega^{\text{s}}t + \phi_0]}, \quad (4.8)$$

$$n(t) \equiv n^{\text{s}}, \quad (4.9)$$

wobei die Kreisfrequenz ω^s von dem Wert ω_0 der einfachen Laserdiode ohne externen Resonator abweichen kann. Wegen $\omega^s t + \phi_0 = \omega_0 t + \phi(t)$ folgt

$$\phi(t) = \Delta\omega t + \phi_0 \quad (4.10)$$

mit $\Delta\omega = \omega^s - \omega_0$, woraus sich wiederum

$$\eta(t) = \Delta\omega t - \Delta\omega(t - \tau) \equiv \Delta\omega\tau \quad (4.11)$$

ergibt. Die konstante Phasendifferenz $\eta^s = \Delta\omega\tau$ ist also proportional zur Abweichung der Lichtkreisfrequenz vom Wert der einfachen Laserdiode, während sich die Phase $\phi(t)$ gemäß (4.10) mit der Zeit ändert.

Einsetzen von $E_0(t) \equiv E_0^s$, $\eta(t) \equiv \eta^s$ und $n(t) \equiv n^s$ in (4.5) liefert mit $\dot{E}_0(t) \equiv 0$

$$n^s = -\frac{2\kappa}{G_N} \cos(\omega_0\tau + \eta^s), \quad (4.12)$$

was in (4.6) eingesetzt mit $\dot{\phi}(t) \equiv \eta^s/\tau$ eine Gleichung für η^s ergibt,

$$\eta^s = -\kappa\tau[\alpha \cos(\omega_0\tau + \eta^s) + \sin(\omega_0\tau + \eta^s)]. \quad (4.13)$$

Unter Zuhilfenahme eines Additionstheorems¹ läßt sie sich in der Form

$$\eta^s = -C \sin(\omega_0\tau + \eta^s + \arctan \alpha) \quad (4.14)$$

schreiben, wobei

$$C = \kappa\tau \sqrt{1 + \alpha^2} \quad (4.15)$$

als *Rückkopplungsstärke* bezeichnet wird. Für die Photonenzahl $P^s = (E_0^s)^2$ liefert (4.7) mit $\dot{n}(t) \equiv 0$ schließlich

$$P^s = \frac{(p-1)J_{\text{th}} - \gamma n^s}{\Gamma + G_N n^s} = \frac{\Gamma P_{\text{sol}} - \gamma n^s}{\Gamma + G_N n^s}, \quad (4.16)$$

wobei P_{sol} die Intensität der einfachen Laserdiode ist.

Die Lösungen η^s der transzendenten Gleichung (4.14) entsprechen Nullstellen der Funktion

$$f(\eta) = \eta + C \sin(\omega_0\tau + \eta + \arctan \alpha), \quad (4.17)$$

¹ $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y)$; der Ansatz $\sin x = \alpha/k$ und $\cos x = 1/k$ liefert $x = \arctan \alpha$ und $k = \sqrt{1 + \alpha^2}$.

die aus einem linearen Anteil und einer sinusförmigen Modulation besteht. Eine Erhöhung der Rückkopplungsstärke C führt zu einer höheren Amplitude dieser Modulation und damit zu einer höheren Anzahl von Fixpunkten. Es läßt sich zeigen, daß für $C < 1$ nur ein Fixpunkt existiert [3], dessen Kreisfrequenz im allgemeinen von der des einfachen Lasers abweicht. Sobald $C \geq 1$ ist, können mehrere Fixpunkte existieren. Bei einer Länge $l_{\text{ext}} = 1.5$ m des externen Resonators entspricht dies mit typischen Werten $\alpha = 5$, $\tau_{\text{in}} = 2$ ps und $R_{\text{fac}} = 0.31$ gemäß (4.15) und (4.2) einer Reflektivität

$$R_{\text{ext}} \approx 10^{-9}$$

des externen Resonatorspiegels. Selbst bei äußerst geringer Rückkopplung durch den externen Resonator existieren also bereits mehrere Fixpunkte η^s und damit mehrere Moden mit unterschiedlichen Frequenzen $\omega^s = \omega_0 + \eta^s/\tau$. Ob das System zwischen verschiedenen dieser Moden hin- und her springt oder sich für eine entscheidet, hängt letztlich von den Stabilitätseigenschaften der Fixpunkte ab, die weiter unten diskutiert werden. Zwei Dinge sind zu bemerken:

- Halbleiterlaser reagieren aus zwei Gründen stärker auf optische Rückkopplung als andere Laser: Erstens wegen ihrer vergleichsweise stark durchlässigen Facetten, zweitens wegen der durch die hohen Werte des α -Faktors bedingten starken Intensitäts-Phasen-Kopplung (siehe Gl. (4.15) und Abschnitt 3.6).
- Eine Verlängerung des externen Resonators und damit der Verzögerungszeit τ erhöht die Rückkopplungsstärke $C = \kappa\tau\sqrt{1 + \alpha^2}$, so daß beispielsweise auch Rückkopplungen von weit entfernten Glasfaserenden Wirkungen zeigen können, die in technischen Anwendungen meist unerwünscht sind.

In Abb. 4.4 ist die Lage der Fixpunkte in der η - n - und in der η - P -Ebene veranschaulicht. Dazu wurden die Ausdrücke (4.12), (4.14) und (4.16) in Abhängigkeit von dem Parameter $\omega_0\tau + \eta^s$ dargestellt.

Die Verzögerungsterme erschweren eine analytische Stabilitätsanalyse. Es wurden jedoch Näherungsrechnungen durchgeführt [84, 47], deren Ergebnisse im folgenden kurz vorgestellt werden. Bei Fixpunkten, in denen $f(\eta^s)$ positive Steigung hat, für die also

$$1 + C \cos(\omega_0\tau + \eta^s + \arctan \alpha) > 0 \quad (4.18)$$

gilt, handelt es sich um Foci. Sie werden *externe Resonatormoden* genannt und entsprechen einer konstruktiven Überlagerung der Felder der Laserdiode und des externen Resonators. Es kann gezeigt werden, daß die Mode maximaler Intensität P^s (und damit minimaler Besetzungszahldifferenz n^s , siehe Abb. 4.4) sowie einige Moden in ihrer Nähe stabil

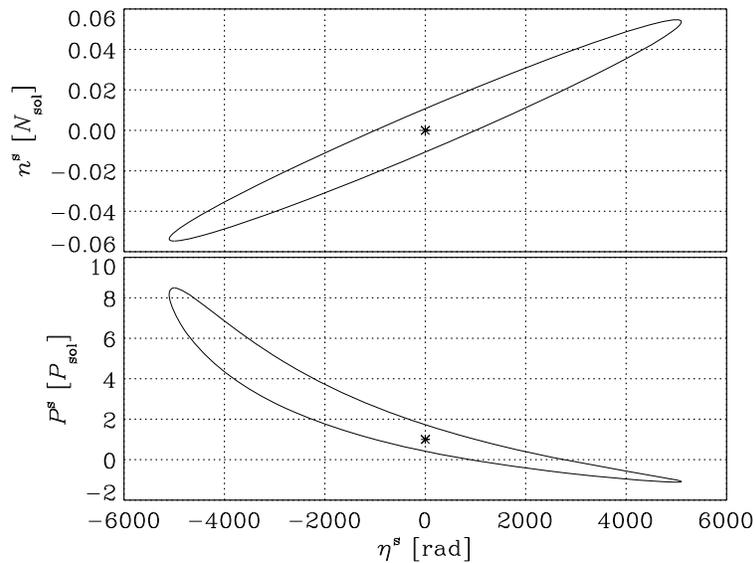


Abbildung 4.4: Die Fixpunkte liegen in der η - n -Ebene auf einer Ellipse, in der η - P -Ebene auf einer „verzerrten Ellipse“. Physikalisch sinnvoll sind nur solche Fixpunkte, für die P^s positiv ist. Die Sternchen markieren die Lage des stabilen Fixpunktes der einfachen Laserdiode ohne externen Resonator. Es wurden die in Tab. 4.1 angegebenen Parameter und eine Rückkopplungsrate $\kappa = 10^1 \text{ s}^{-1}$ verwendet.

τ	10 ns	Umlaufzeit im externen Resonator
G_N	$2.142 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$	differentieller optischer Gewinn
N_{sol}	1.707×10^8	Ladungsträgerzahl des einfachen Lasers
Γ	0.357 ps^{-1}	Photonenverlustrate
γ	0.909 ns^{-1}	Ladungsträgerverlustrate
α	5.0	Linienbreitenvergrößerungsfaktor
J_{th}	γN_{sol}	Schwellstrom
p	1.02	Verhältnis von Pump- zu Schwellstrom
C_{sp}	10^{-5} s^{-1}	spontane Emissionsrate
$2\pi c/\omega_0$	635 nm	Wellenlänge

Tabelle 4.1: Für die in diesem Kapitel vorgestellten numerischen Rechnungen verwendete Parameter, aus Ref. [82].

sind [47]. Die übrigen Moden sind instabile Grenzyklen, die gelegentlich auch als „Attraktorruienen“ bezeichnet werden. Fixpunkte, in denen $f(\eta^s)$ negative Steigung hat, sind dagegen instabile Sattelpunkte. Sie werden auch *Antimoden* genannt und entsprechen einer destruktiven Überlagerung der Felder der Laserdiode und des externen Resonators. Mit wachsender Rückkopplungsstärke C entstehen an den Enden der in Abb. 4.4 dargestellten Ellipsen durch Sattel-Knoten-Bifurkation ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt. Bei weiterer

Erhöhung von C wird der entstandene stabile Fixpunkt durch mehrfache Hopfbifurkationen instabil [84, 76]. In der Darstellung von Abb. 4.4 liegen die externen Resonanzmoden auf dem unteren Rand der Ellipse in der η - n -Ebene und auf dem oberen Rand der „verzerrten Ellipse“ in der η - P -Ebene. Die Sattelpunkte liegen auf den jeweils anderen Rändern.

4.4 Modellrechnungen zur LFF-Dynamik

Den folgenden Modellrechnungen liegen die deterministischen Lang-Kobayashi-Gleichungen (4.5)–(4.7) zugrunde. Das verwendete numerische Integrationsverfahren ist in Anhang B beschrieben.

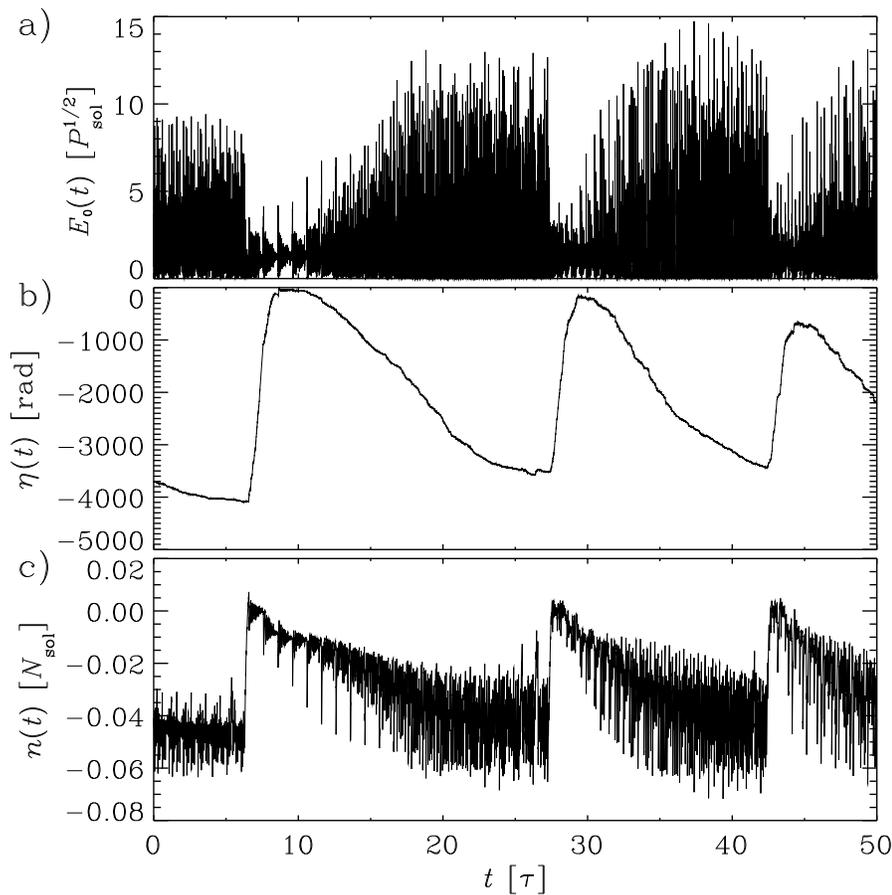


Abbildung 4.5: Darstellung der numerisch berechneten elektrischen Feldstärke $E_0(t)$, der Phasendifferenz $\eta(t) = \phi(t) - \phi(t - \tau)$ und der Besetzungszahldifferenz $n(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t im Bereich der LFF.

Abbildung 4.5 zeigt ein typisches Beispiel der berechneten Amplitude $E_0(t)$ der elektrischen Feldstärke (Abb. a), der Phasendifferenz $\eta(t) = \phi(t) - \phi(t - \tau)$ (Abb. b) und der Be-

setzungszahldifferenz $n(t)$ (Abb. c) für eine Rückkopplungsrate $\kappa = 10^{11} \text{ s}^{-1}$. Für die Rechnung wurden die in Tab. 4.1 angegebenen Parameter verwendet, die Ref. [82] entnommen wurden. Für den zurückgekoppelten Intensitätsanteil ergibt sich $\rho = (\kappa\tau_{\text{in}})^2 \approx -14 \text{ dB}$ (mit $\tau_{\text{in}} = 2 \text{ ps}$).

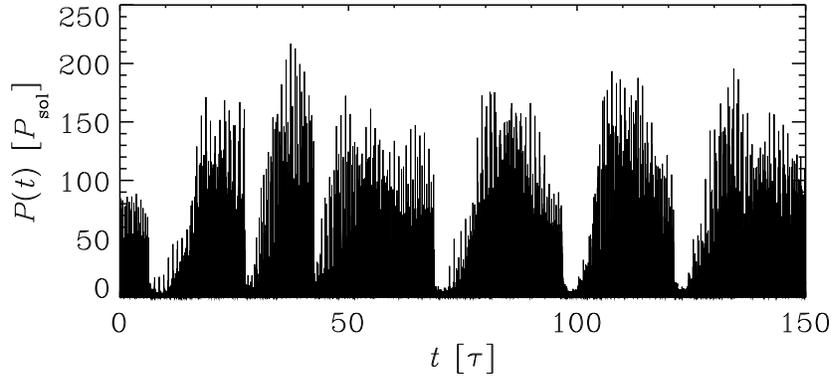


Abbildung 4.6: Darstellung der numerisch berechneten Photonenzahl $P(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t im Bereich der LFF.

In Abb. 4.6 ist die Photonenzahl $P(t) = E_0^2(t)$ dargestellt, die proportional zur Intensität ist. Das Ergebnis hat keine Ähnlichkeit mit dem in Abb. 4.2 dargestellten experimentell gemessenen Signal. Eine Ausschnittvergrößerung in Abb. 4.7 zeigt, daß das Signal aus unregelmäßigen Pulsen mit Längen im Pikosekundenbereich besteht. Diese können mit Hilfe von Photodiode und Oszilloskop nicht aufgelöst werden, da derartige Geräte lediglich Bandbreiten von etwa 1 GHz besitzen. FISCHER et al. gelang es jedoch mit Hilfe einer Streikkamera mit einer Bandbreite von 50 GHz, derartige Pulse experimentell zu messen [21].

Abbildung 4.8 zeigt eine Zeitreihe, wie sie mit einer Photodiode gemessen werden würde; dazu wurde das Signal mit 1 GHz tiefpaßgefiltert. Die abrupten Intensitätseinbrüche sind deutlich zu erkennen, die hochfrequenten Oszillationen zwischen den Einbrüchen sind jedoch stärker ausgeprägt als im experimentell aufgenommenen Signal (vgl. Abb. 4.2).

SANO [76] erklärte die Aufbauphase der Intensität nach einem Einbruch als chaotisches Wandern entlang der instabilen externen Resonatormoden. Dabei existiert eine Drift hin zur (stabilen) Mode maximalen Gewinns, die jedoch nicht erreicht wird, da aufgrund einer Krise [57] die Möglichkeit besteht, daß das System in die Nähe der stabilen Mannigfaltigkeit eines Sattelpunktes gerät. Tritt dieses ein, so bewegt es sich zunächst auf den Sattelpunkt zu und anschließend entlang dessen instabiler Mannigfaltigkeit in Richtung der Mitte der in Abb. 4.4 dargestellten Ellipse, von wo das System wieder beginnt, entlang den externen Resonatormoden zu wandern. Das Auftreten eines dadurch verursachten Einbruchs der mittleren Intensität wird immer wahrscheinlicher, je näher das System der Spitze der Ellipse

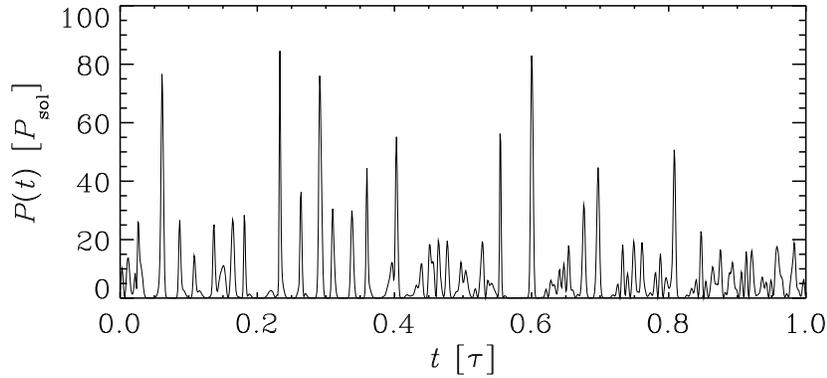


Abbildung 4.7: Vergrößerter Ausschnitt aus Abb. 4.6.

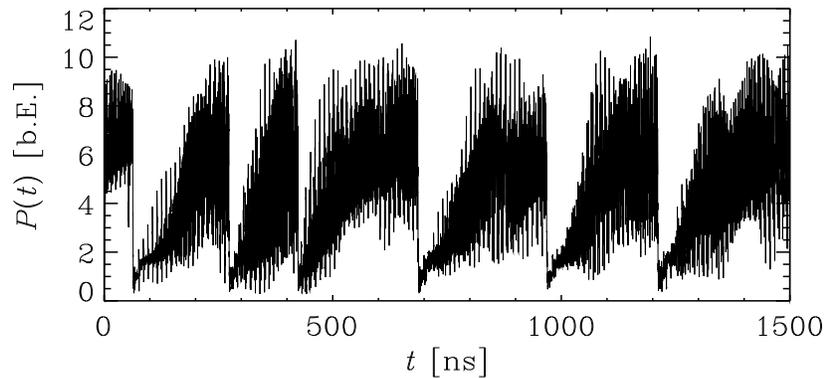


Abbildung 4.8: Mit 1 GHz tiefpaßgefilterte Zeitreihe aus Abb. 4.6. Da die Photonenzahl $P(t)$ proportional zur Intensität ist, entspricht dieses Signal demjenigen, das mit Hilfe einer Photodiode mit einer zeitlichen Auflösung von 1 ns gemessen werden würde (vgl. Abb. 4.2).

kommt, da die Moden und Sattelpunkte dort näher zusammenliegen als in der Mitte.

VAN TARTWIJK et al. prägen für diesen Prozeß den Begriff „Sisyphoseffekt“ [82]. In Abb. 4.9 ist der numerisch berechnete Attraktor im dreidimensionalen Phasenraum der Vektoren $(E_0, \eta, n)^T$ dargestellt, mit $\eta(t) = \phi(t) - \phi(t - \tau)$. Durch einen Vergleich mit Abb. 4.4 wird deutlich, daß die Pikosekundenpulse in den Oszillationen der Trajektorie um die instabilen externen Resonatormoden begründet liegen. Es muß jedoch beachtet werden, daß das Delaysystem einen unendlichdimensionalen Zustandsraum besitzt (siehe Abschnitt 2.3). Im nächsten Abschnitt wird sich zeigen, daß dem Modellsystem eine hochdimensionale Dynamik zugrunde liegt. Daher handelt es sich bei der dreidimensionalen Darstellung mögli-

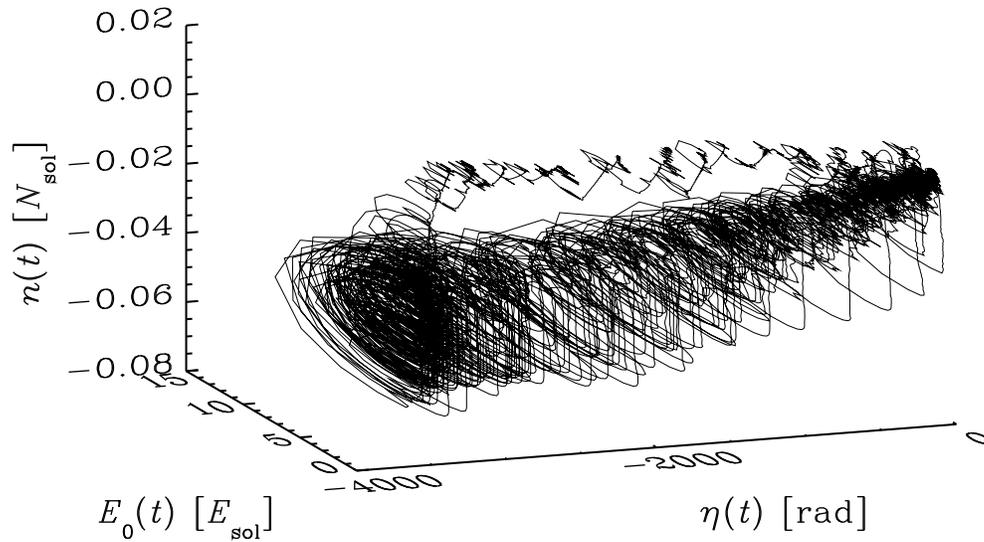


Abbildung 4.9: Numerisch berechneter Attraktor (E_0, η, n) . Dargestellt ist die Trajektorie im Verlauf eines Intensitätseinbruchs.

cherweise lediglich um eine Projektion des tatsächlichen, höherdimensionalen Attraktors in den \mathbb{R}^3 .

Das Modell schließt grundsätzlich nicht aus, daß es dem System gelingt, eine stabile Mode hohen Gewinns am Ende der Ellipse zu erreichen und auf dieser zu verweilen. In diesem Fall sollte die mittlere Intensität über der zwischen den Einbrüchen erreichten Intensität liegen, es sollten keine Intensitätseinbrüche mehr auftreten, und die Linienbreite der Laserdiode sollte sich drastisch verringern. Dies konnte vor kurzem experimentell gezeigt werden [30, 20], wodurch das deterministische Modell weiter gestützt wird: Keines der in Abschnitt 4.1 vorgestellten stochastischen Modelle bietet eine Erklärung für diese Beobachtung an.

4.5 Lyapunovexponenten des Delaysystems

Bewegt sich das System auf einem Attraktor, so geben die Lyapunovexponenten Auskunft darüber, ob es chaotisch ist. Daher lohnt es sich, die Lyapunovexponenten des Modellsystems numerisch zu berechnen [4]. Wie bereits in Abschnitt 2.3 bemerkt, lautet das Differentialgleichungssystem für die zeitliche Entwicklung einer kleinen Störung $\delta \mathbf{x}^i = (\delta E_0^i, \delta \phi^i, \delta n^i)^T$ des Systemvektors $\mathbf{x} = (E_0, \phi, n)^T$ im Falle von Delaydifferentialgleichungen in linearer Näherung

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}^i(t) = \mathbf{Df}_1[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)] \delta \mathbf{x}^i(t) + \mathbf{Df}_2[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)] \delta \mathbf{x}^i(t-\tau). \quad (4.19)$$

Als Jacobimatrizen von \mathbf{f} ergeben sich nach (4.5)–(4.7) mit der Abkürzung $\psi(t) = \omega_0 \tau + \phi(t) - \phi(t-\tau)$

$$\begin{aligned} \mathbf{Df}_1[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)] &= \frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)]}{\partial \mathbf{x}(t)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} G_N n(t) - \frac{C_{\text{sp}} \gamma [N_{\text{sol}} + n(t)]}{2E_0^2(t)} & -\kappa E_0(t-\tau) \sin \psi(t) & \frac{1}{2} G_N E_0(t) + \frac{C_{\text{sp}} \gamma}{2E_0(t)} \\ \kappa \frac{E_0(t-\tau)}{E_0^2(t)} \sin \psi(t) & -\kappa \frac{E_0(t-\tau)}{E_0(t)} \cos \psi(t) & \frac{1}{2} \alpha G_N \\ -2[\Gamma + G_N n(t)] E_0(t) & 0 & -\gamma - G_N E_0^2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathbf{Df}_2[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)] &= \frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)]}{\partial \mathbf{x}(t-\tau)} \\ &= \begin{pmatrix} \kappa \cos \psi(t) & \kappa E_0(t-\tau) \sin \psi(t) & 0 \\ -\frac{\kappa}{E_0(t)} \sin \psi(t) & \kappa \frac{E_0(t-\tau)}{E_0(t)} \cos \psi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zur numerischen Berechnung der N größten der unendlich vielen Lyapunovexponenten wird das Intervall $[t-\tau, t]$ diskretisiert; diese Vorgehensweise wurde 1982 von FARMER zur Untersuchung der skalaren Mackey-Glass-Gleichung angewendet [18]. Die im vorliegenden Fall vektorwertigen Funktionen $\delta \mathbf{x}^i(t) = (\delta E_0^i(t), \delta \phi^i(t), \delta n^i(t))^T$, $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, $i = 1, \dots, N$, werden demnach approximiert durch Vektoren \mathbf{y}^i , die aus den für das Integrationsverfahren (siehe Anhang B) gespeicherten Werten aus der Vergangenheit von $\delta \mathbf{x}(t)$ be-

stehen:

$$\mathbf{y}^i(t_0) = (\delta E_0^i(t_0), \delta \phi^i(t_0), \delta n^i(t_0), \delta E_0^i(t_1), \delta \phi^i(t_1), \delta n^i(t_1), \dots, \delta E_0^i(t_M), \delta \phi^i(t_M), \delta n^i(t_M))^T,$$

mit $t_0 > t_1 > \dots > t_M = t_0 - \tau$.

Nun wird das aus (4.5)–(4.7) und N Systemen der Form (4.19) bestehende System von $3(N+1)$ Differentialgleichungen, wie in Anhang B dargestellt, integriert. Für die Störungen $\delta \mathbf{x}^i(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, werden die Anfangswerte derart gewählt, daß die Norm $\|\mathbf{y}^i(0)\|$ den Wert $y_0 = 1$ besitzt; dabei und im folgenden werden die Norm

$$\|\mathbf{y}^i(t_0)\| = \langle \mathbf{y}^i(t_0), \mathbf{y}^i(t_0) \rangle^{1/2}$$

und das Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{y}^i(t_0), \mathbf{y}^j(t_0) \rangle = \sum_{k=0}^{M-1} (t_k - t_{k+1}) \delta \mathbf{x}^i(t_k) \cdot \delta \mathbf{x}^j(t_k) \approx \int_{t_0-\tau}^{t_0} dt \delta \mathbf{x}^i(t) \cdot \delta \mathbf{x}^j(t)$$

verwendet, wobei $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ das übliche Skalarprodukt für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet.

In nicht zu großen Zeitabständen Δt_{rn} werden die Normen $\|\mathbf{y}^i(k\Delta t_{\text{rn}})\|$ berechnet. Anschließend werden die \mathbf{y}^i unter Verwendung eines Gram-Schmidt-Verfahrens [57] reorthogonalisiert und auf den Wert y_0 normiert. Die Lyapunovexponenten ergeben sich schließlich als

$$\lambda_i = \frac{1}{(n - n_{\text{tr}})\Delta t_{\text{rn}}} \sum_{k=n_{\text{tr}}+1}^n \log \frac{\|\mathbf{y}^i(k\Delta t_{\text{rn}})\|}{y_0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.20)$$

für eine möglichst große Zahl n ; n_{tr} ist die Anzahl der Intervalle Δt_{rn} , die als Transiente betrachtet und nicht für die Berechnung der Lyapunovexponenten berücksichtigt werden. Um die Verlässlichkeit der Ergebnisse zu überprüfen, wird das Verfahren mit verschiedenen Rechengenauigkeiten ϵ der Integrationsroutine durchgeführt: Je höher die Rechengenauigkeit ist, desto kleinere Zeitschritte macht die Integrationsroutine und desto mehr Werte aus der Vergangenheit der $\delta \mathbf{x}^i(t)$ werden somit gespeichert. Unabhängigkeit von der Rechengenauigkeit der Integrationsroutine bedeutet demnach Unabhängigkeit von der Feinheit der Diskretisierung der Intervalle $[t - \tau, t]$.

Abbildung 4.10 zeigt die ersten drei Lyapunovexponenten in Abhängigkeit von der Anzahl $n - n_{\text{tr}}$ der in der Mittelung (4.20) berücksichtigten Reorthonormalisierungen für verschiedene Rechengenauigkeiten. Als Transiente wurden $n_{\text{tr}} = 2000$ Reorthonormalisierungsintervalle betrachtet, und es wurde eine Rückkopplungsrate $\kappa = 10^{11} \text{ s}^{-1}$ verwendet, für die sich

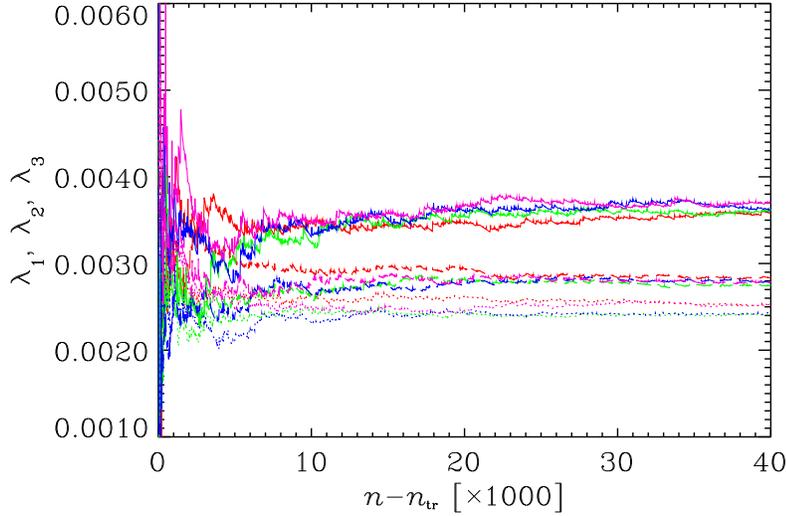


Abbildung 4.10: Die drei größten Lyapunovexponenten λ_1 (durchgezogene Linie), λ_2 (gestrichelte Linie) und λ_3 (gepunktete Linie) für $\kappa = 10^{11} \text{ s}^{-1}$ in Abhängigkeit von der Anzahl $n - n_{\text{tr}}$ der Reorthonormalisierungen. Bei der numerischen Integration wurden die Rechengenauigkeiten $\epsilon = 5 \times 10^{-6}$ (rot), $\epsilon = 2 \times 10^{-6}$ (grün), $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$ (blau) und $\epsilon = 5 \times 10^{-7}$ (violett) verwendet (siehe Anhang B).

das System im Bereich der LFF befindet. Außerdem wurden, wie auch für alle folgenden Rechnungen dieses Abschnitts, $\Delta t_{\text{rn}} = \tau/20$ sowie die in Tab. 4.1 angegebenen Parameter verwendet. Zu erkennen sind die Konvergenz der Mittelung und die weitgehende Unabhängigkeit von der Rechengenauigkeit. Zwar unterscheiden sich die Ergebnisse für den dritten Lyapunovexponenten in Abhängigkeit von der Rechengenauigkeit um $\approx 4\%$, doch ist kein Trend zu erkennen.

Die Abhängigkeit der zehn größten Lyapunovexponenten von der Rückkopplungsrate τ ist in Abb. 4.11 dargestellt. Bei der Berechnung wurden $n = 40000$ und $n_{\text{tr}} = 4000$ verwendet. Für $\kappa \gtrsim 4 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$ ist das System also chaotisch, da der größte Lyapunovexponent positiv ist. Für wachsendes κ werden auch die weiteren Lyapunovexponenten nach und nach positiv; das System wird also hyperchaotisch.

In Abb. 4.12 ist das Spektrum der 100 größten Lyapunovexponenten für $\kappa = 10^{11} \text{ s}^{-1}$ (LFF-Bereich) gezeigt. Bei der Berechnung wurden $n = 10000$ und $n_{\text{tr}} = 500$ verwendet. Längere Transienten brachten keine Veränderung des Ergebnisses. Alle Exponenten sind positiv. Dies sagt etwas über die Dimension des Systems aus: Die Lyapunovdimension ist definiert durch

$$d_{\text{L}} = k + \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{|\lambda_{k+1}|},$$

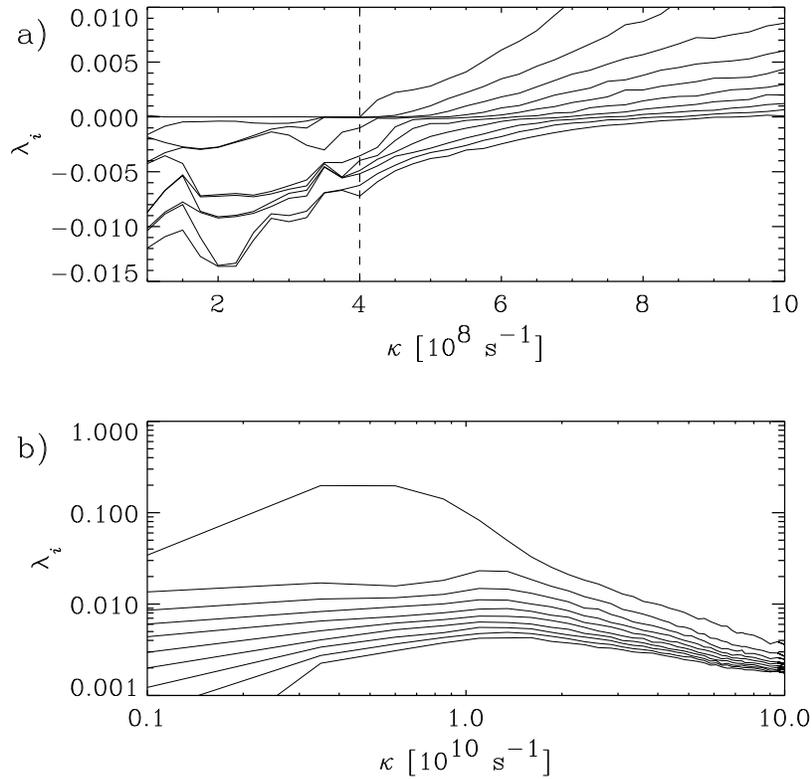


Abbildung 4.11: Die zehn größten Lyapunovexponenten λ_i in Abhängigkeit von κ ; zu beachten ist die doppeltlogarithmische Auftragung in b.

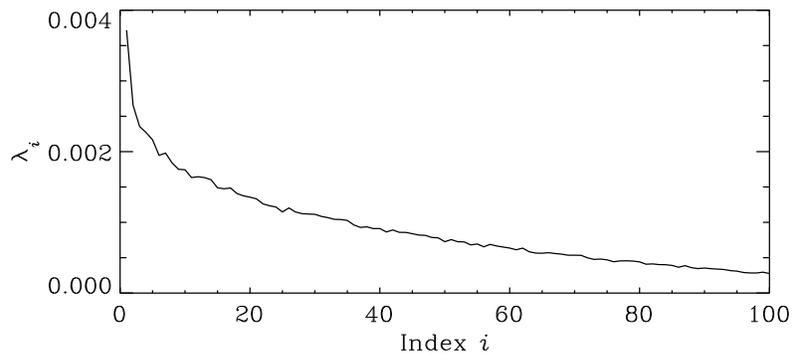


Abbildung 4.12: Spektrum der 100 größten Lyapunovexponenten λ_i für $\kappa = 10^{11} \text{ s}^{-1}$ (LFF-Bereich).

wobei k der größte Index ist, für den $\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq 0$ ist. Nach der Kaplan-Yorke-Vermutung entspricht sie der Informationsdimension [57]; dies konnte für die Mackey-Glass-Gleichung, eine skalare Delaydifferentialgleichung, bestätigt werden [18]. Da alle 100 berechneten

Lyapunovexponenten positiv sind, folgt $d_L > 100$. Derartig hochdimensionale Dynamik wurde auch in anderen Delaysystemen beobachtet [23].

4.6 Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

In Abb. 4.13 ist der experimentelle Aufbau gezeigt. Er besteht aus folgenden Komponenten:

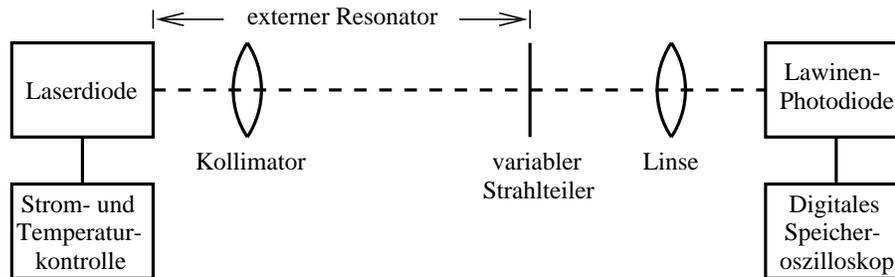


Abbildung 4.13: Darstellung des experimentellen Aufbaus.

- Die Laserdiode besitzt eine Wellenlänge von ≈ 635 nm und einen Schwellstrom von ≈ 35 mA (Conrad, Hersteller nicht ermittelbar). Sie wird mit einer im Institut entwickelten Stromregelung betrieben.
- Die Temperatur der Laserdiode wird von einer ebenfalls im Institut entwickelten Temperaturregelung mit Hilfe eines Meßfühlers und eines Peltierelements bis auf ≈ 0.01 °C konstant gehalten. Über einen DA-Wandler und die RS232-Schnittstelle eines Computers ist es möglich, die Temperatur in Schritten von 0.01 °C im Bereich 10 °C bis 50.95 °C einzustellen. Die Laserdiode ist zusammen mit einer Kollimationslinse und dem Peltierelement an einem Aluminiumblock befestigt. Außerdem kann die ganze Einheit mit einer Styroporhaube abgedeckt werden.
- Der variable Strahlteiler, der als externer Resonatorspiegel dient, besteht aus einem drehbaren Aluminiumspiegel, dessen Reflektivität zwischen 8.5% und 85% variiert (Jodon VBA-200).
- Die Lawinenphotodiode (engl. *avalanche photo diode*, APD) besitzt eine Grenzfrequenz von ≈ 1.3 GHz (Silicon Sensor SSO-AD500NF). Ihr ist ein Meßverstärker nachgeschaltet.
- Bei dem Oszilloskop handelt es sich um ein digitales Speicheroszilloskop (LeCroy LC574AM). Es besitzt eine Analogbandbreite von 1 GHz, eine maximale Abtastrate von 4 GS/s (S: *Samples*, dt. Abtastwerte), eine vertikale Auflösung von 8 bit und eine Speichertiefe von 2 MS. Eine IEEE-488-Schnittstelle ermöglicht die vollständige

Steuerung durch einen Computer und die Speicherung von Meßdaten auf dessen Festplatte.

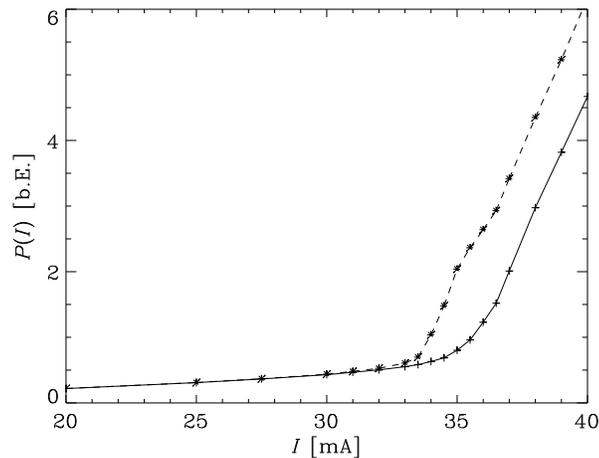


Abbildung 4.14: Kennlinie der Laserdiode (Intensität P in Abhängigkeit vom Pumpstrom I) ohne (durchgezogene Linie) und mit (gestrichelte Linie) externem Resonator.

In Abb. 4.14 ist die experimentell gemessene Kennlinie der Laserdiode (also die Intensität in Abhängigkeit vom Pumpstrom) mit und ohne externen Resonator dargestellt. Deutlich zu erkennen ist die durch den externen Resonator verursachte Schwellstromabsenkung von ≈ 35 mA auf ≈ 33 mA. Außerdem ist ein Abknicken der Kennlinie der Laserdiode mit externem Resonator im Bereich 34.5–36.0 mA zu beobachten. Dies ist der Bereich, in dem *low frequency fluctuations* zu beobachten sind [19].

4.6.1 Zeitreihenanalyse

Im folgenden sollen einige Vergleiche zwischen den Ergebnissen der numerischen Simulationen und gewonnenen Meßdaten angestellt werden.

In Abb. 4.15 sind die jeweiligen Leistungsspektren dargestellt, die aus den Intensitätssignalen mittels der schnellen Fouriertransformation (FFT) berechnet wurden. Die deutlichen Unterschiede für niedrige Frequenzen lassen sich durch im Experiment vorhandenes Rauschen erklären. In beiden Spektren sind deutlich die Harmonischen der Umlauffrequenz $\nu_{\text{ext}} = 1/\tau$ des externen Resonators zu erkennen. Im Experiment wurde eine Länge $l_{\text{ext}} \approx 124$ cm gemessen; dies entspricht einer Umlaufzeit $\tau = 2l_{\text{ext}}/c \approx 8.3$ ns bzw. einer Umlauffrequenz $\nu_{\text{ext}} \approx 120.5$ MHz. Die Abtastrate betrug $\Delta t = 0.25$ ns. In der numerischen Simulation wurde mit $\tau = 8.3$ ns bzw. $\nu_{\text{ext}} \approx 120.5$ MHz gerechnet. Hier betrug die Abtastrate $\Delta t = 0.05$ ns.

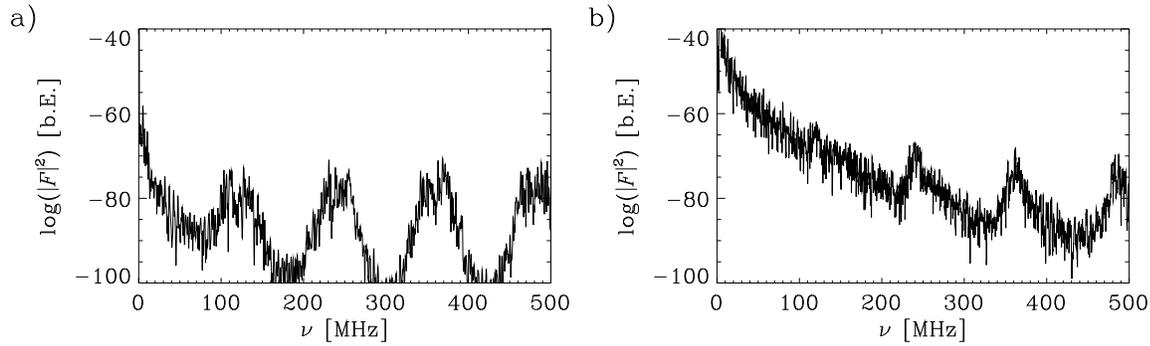


Abbildung 4.15: Mittels der schnellen Fouriertransformation aus den Intensitätssignalen berechnete Leistungsspektren $|F(\nu)|^2$ für die numerische Simulation (a) und für experimentelle Daten (b).

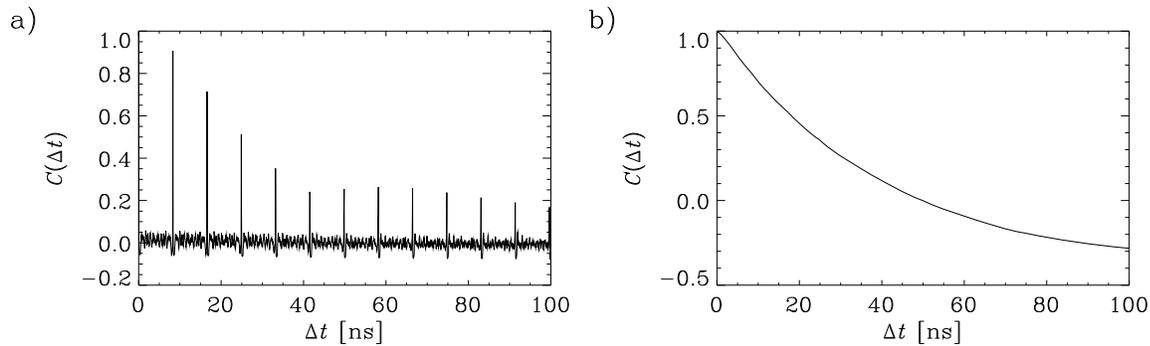


Abbildung 4.16: Autokorrelationsfunktionen $C(\Delta t)$ für die numerische Simulation (a) und für experimentelle Daten (b).

Die gleichen Zeitreihen wurden auch für die Berechnung der in Abb. 4.16 dargestellten Autokorrelationsfunktionen verwendet. Hier ist ein deutlicher Unterschied zwischen den Ergebnissen zu erkennen: Während für die numerischen Daten die Umlaufzeit $\tau = 8.3$ ns des externen Resonators abgelesen werden kann, ist sie im Falle der experimentellen Daten nicht zu erkennen. Dies liegt in der durch die Photodiode vorgenommenen Mittelung begründet.

Der Ursprung der stark ausgeprägten Pulse in der Autokorrelationsfunktion der numerisch berechneten Daten wird in einer „raumzeitlichen“ Darstellung deutlich, die auf ARECCHI et al. zurückgeht [9]. Dabei wird die Zeitvariable t gemäß

$$t = s + k\tau, \quad \text{mit } s \in [0, \tau[, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

aufgeteilt in eine „räumliche“ Variable s , die die Position innerhalb eines Delayintervalls der Länge τ bezeichnet, und eine diskrete „zeitliche“ Variable k , die das betrachtete Delayintervall angibt. In Abb. 4.17 ist der Logarithmus der numerisch berechneten Photonenzahl,

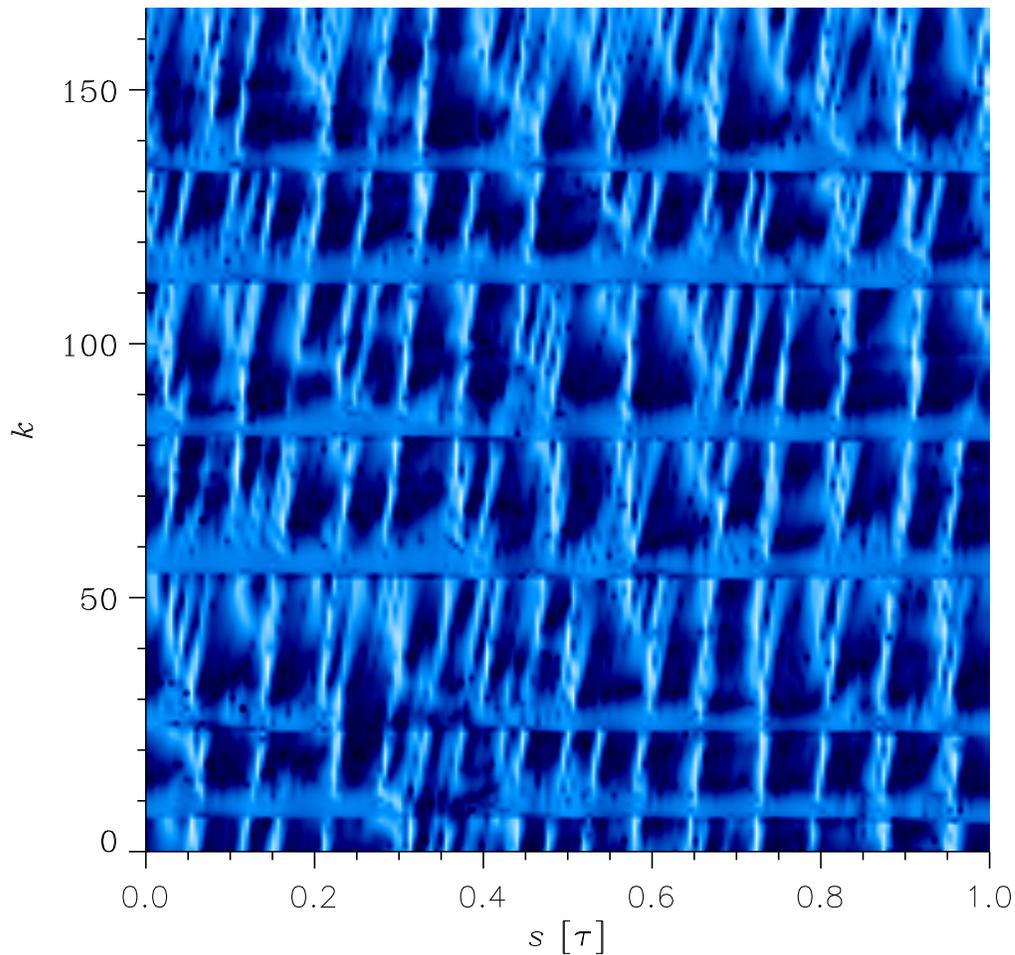


Abbildung 4.17: „Raumzeitliche“ Darstellung des Logarithmus der numerisch berechneten Photonenzahl $P[t(s, k)]$ in Abhängigkeit vom „Ort“ s und der „Zeit“ k (siehe Text). Helle Farben entsprechen hohen Werten des Logarithmus.

$\log P[t(s, k)]$, in Abhängigkeit von s und k aufgetragen. Der Wert des Logarithmus ist in Farbstufen kodiert, helle Farben entsprechen hohen Werten. Eine entsprechende Darstellung für die experimentell gemessenen Daten gibt Abb. 4.18. Die horizontalen Balken mittlerer (Abb. 4.17) bzw. niedriger (Abb. 4.18) Helligkeit entsprechen den Intensitätseinbrüchen. An den vertikalen Strukturen in Abb. 4.17 ist für die numerischen Daten die Korrelation zwischen $P(t)$ und $P(t + \tau)$ zu erkennen: Einem Pikosekundenpuls zum Zeitpunkt t folgt mit hoher Wahrscheinlichkeit ein Puls zum Zeitpunkt $t + \tau$. Bei genauerer Betrachtung fällt allerdings auf, daß die Balken nicht exakt vertikal sind. Das läßt sich dadurch erklären, daß das System erst nach einer gewissen Reaktionszeit auf das mit einer Zeitverzögerung τ zu-

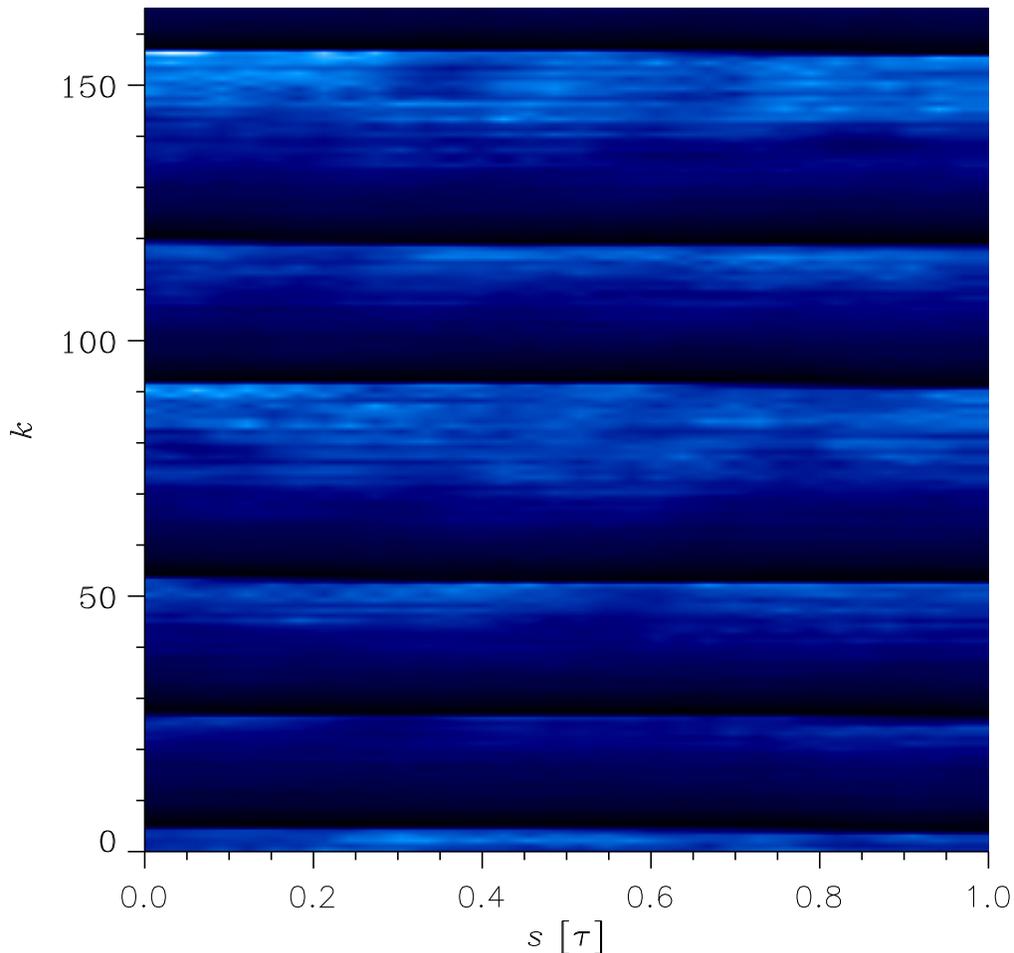


Abbildung 4.18: „Raumzeitliche“ Darstellung des Logarithmus der experimentell gemessenen Intensität; vgl. Abb. 4.17.

rückgekoppelte Signal antwortet. Diese Beobachtung läßt sich allgemein an Delaysystemen machen [29]. Im vorliegenden Fall ist die Reaktionszeit sehr kurz; in der Autokorrelationsfunktion schlägt sie sich erst bei größeren Zeitdifferenzen Δt nieder, wie in Abb. 4.19 zu sehen ist. Für die experimentellen Daten ergeben sich keine derartig stark ausgeprägten vertikalen Strukturen, da die Pikosekundenpulse von der Photodiode und dem Oszilloskop nicht aufgelöst werden können. Dies erklärt das Fehlen der Pulse in der Autokorrelationsfunktion des experimentell gemessenen Signals.

Eine Standardmethode der nichtlinearen Zeitreihenanalyse ist die Attraktorrekonstruktion mit Hilfe von Verzögerungskoodinaten [38]. Aus den skalaren, äquidistant abgetasteten Meßwerten $x^i = g[x(t_i)]$ der Dynamik des Systems $x(t)$ werden Vektoren der Form

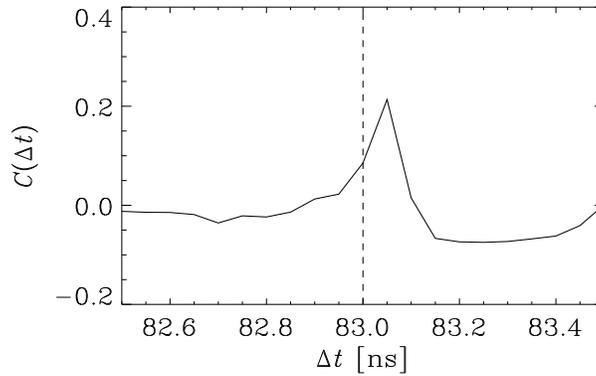


Abbildung 4.19: Autokorrelationsfunktion $C(\Delta t)$ für die numerische Simulation, Vergrößerung von Abb. 4.16 a. Würde das System instantan auf das mit einer Verzögerung $\Delta t = 8.3$ ns zurückgekoppelte Signal reagieren, so befände sich der Puls exakt bei $\Delta t = 83$ ns.

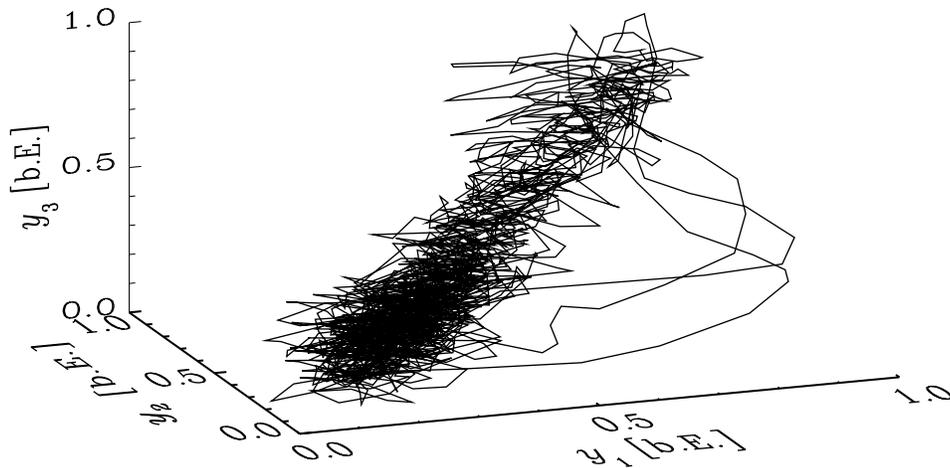


Abbildung 4.20: Dreidimensionale Rekonstruktion des Attraktors aus dem in Abb. 4.2 gezeigten Signal (vgl. Abb. 4.9).

$\mathbf{y}^i = (x^i, x^{i-\Delta}, \dots, x^{i-(d-1)\Delta})^T$ gebildet. Bei geeigneter Wahl der Dimension d ist die Abbildung $\mathbf{h} : \mathbf{x}(t_i) \mapsto \mathbf{y}^i$ für fast alle Δ ein Diffeomorphismus. Es wird dann von einer *Einbettung* des Attraktors in den \mathbb{R}^d gesprochen. Da einige für den Attraktor oder die Dynamik charakteristische Größen (z. B. Lyapunovexponenten) invariant unter diffeomorphen Abbildungen sind, können sie aus dem rekonstruierten Attraktor bestimmt werden.

In Abb. 4.20 ist eine dreidimensionale Attraktorrekonstruktion aus dem in Abb. 4.2 gezeigten Signal zu sehen. Ein Vergleich mit dem numerisch berechneten Attraktor (Abb. 4.9) zeigt zumindest qualitative Ähnlichkeiten. Eine glattere Rekonstruktion ist wegen der Begrenzung der zeitlichen Auflösung durch Oszilloskop und Photodiode unmöglich. Diese Begrenzung der zeitlichen Auflösung ist auch ein Grund dafür, daß eine Anwendung der Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse keine befriedigenden Ergebnisse liefert. Die Photodiode führt praktisch eine zeitliche Mittelung des Signals mit einem Fenster der Länge ≈ 1 ns durch, so daß durch die Messung ein tiefpaßgefiltertes Signal erhalten wird. Derartige Filter können die Ergebnisse der nichtlinearen Zeitreihenanalyse verfälschen [38]. Ein schwerwiegenderer Grund für das Versagen der nichtlinearen Zeitreihenanalyse ist jedoch die hochdimensionale Dynamik, die die Ergebnisse der numerischen Simulationen vermuten lassen (siehe Abschnitt 4.5). Die Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse eignen sich fast ausschließlich für niedrigdimensionale Systeme.

4.6.2 Zeitintervalle zwischen den Intensitätseinbrüchen

Eine Vorhersage numerischer Modellrechnungen, die sich direkt experimentell überprüfen läßt, ist die Verteilung der Zeitintervalle zwischen den Intensitätseinbrüchen. Abbildung 4.21 stellt der numerisch berechneten Verteilung (Abb. a) die aus experimentellen Daten ermittelte Verteilung (Abb. b) gegenüber. Für die numerische Rechnung wurden die Parameter aus Tab. 4.1 sowie $\kappa = 10^{11} \text{ s}^{-1}$ verwendet, im Experiment wurden ein Pumpstrom knapp über dem Schwellstrom und ein externer Resonator der Länge $l_{\text{ext}} = 124 \text{ mm}$ (also eine Umlaufzeit $\tau \approx 8.3 \text{ ns}$) gewählt.

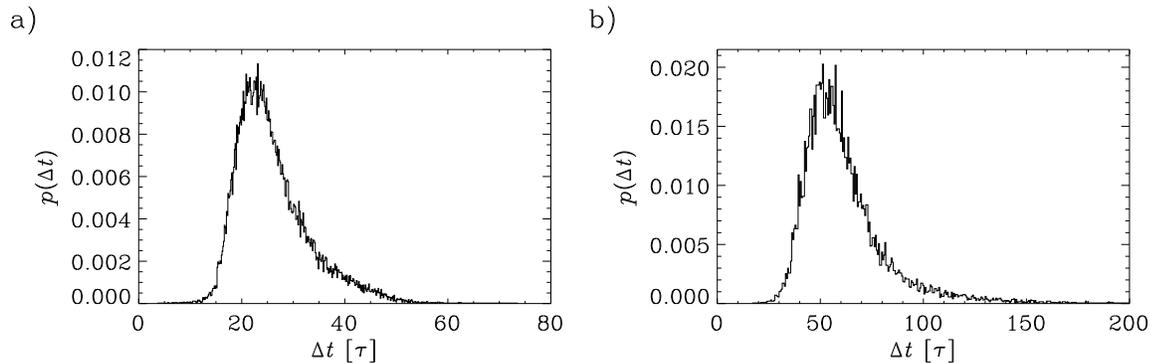


Abbildung 4.21: Verteilung der Intervalle zwischen den Intensitätseinbrüchen gemäß den numerischen Modellrechnungen für $\kappa = 10^{11} \text{ s}^{-1}$ und $J/J_{\text{th}} = 1.02$ (Abb. a) sowie aus experimentell gemessenen Daten (Abb. b).

Da die Parameter der Laserdiode nicht bekannt sind, kann lediglich ein qualitativer Vergleich angestellt werden. Dieser zeigt eine recht gute Übereinstimmung in der Form der Verteilung. Insbesondere existiert in beiden Fällen eine untere Schranke für die auftretenden

Intervalle Δt zwischen zwei Intensitätseinbrüchen. Diese untere Schranke läßt sich durch das stochastische Henry-Kazarinov-Modell (siehe Abschnitt 4.1) nicht erklären, wie in einer kürzlich veröffentlichten Arbeit gezeigt wurde [80]. Die Autoren konnten Vorhersagen des ebenfalls stochastischen Modells von MØRK et al. bestätigen, verzichteten jedoch auf einen Vergleich der experimentellen Daten mit dem in dieser Arbeit gewählten deterministischen Modell von SANO. Festzuhalten ist, daß die numerisch ermittelte Verteilung (Abb. 4.21 a) ausgesprochen gut mit den in der genannten Arbeit [80] präsentierten experimentell ermittelten Verteilungen übereinstimmt.

Kapitel 5

Synchronisation chaotischer Laserdioden

Nachdem es vielfach gelungen ist, experimentelle chaotische Systeme in Form von elektrischen Schaltkreisen zu synchronisieren, stellen chaotische Laser eine weitere Herausforderung dar. Die Situation ist dabei aus mehreren Gründen schwieriger: Optische Systeme erfordern einen höheren experimentellen Aufwand als elektrische Schaltkreise, viele durch Lasereigenschaften gegebene Systemparameter sind nur schwer oder gar nicht veränderbar, und auch einige dynamische Größen (z. B. die Ladungsträgerinversion) sind von außen nicht zugänglich. Andererseits sind chaotische Laser für mögliche Anwendungen der Synchronisation chaotischer Systeme in der Kommunikation von besonderem Interesse, da optische Kommunikationssysteme wegen der großen zur Verfügung stehenden Bandbreite in immer stärkerem Maße zum Einsatz kommen.

Im folgenden soll ein kurzer Überblick über den momentanen Stand der Forschung gegeben werden. Soweit es nicht ausdrücklich vermerkt ist, wurde dabei unidirektionale Kopplung zwischen den einzelnen Lasern verwendet.

5.1 Überblick

Synchronisation zwischen chaotischen Lasern konnte bisher nur von wenigen Gruppen *experimentell* gezeigt werden:

1. ROY und THORNBURG gelang es 1994, zwei chaotische Lichtstrahlen innerhalb eines Nd:YAG-Lasers zu synchronisieren [72, 83], wie bereits durch numerische Simulationen vorhergesagt worden war [17]. Die *bidirektionale* Kopplung fand dabei über die Inversion des aktiven Mediums statt, wenn die beiden Strahlen nah genug beieinander waren.
2. Ebenfalls 1994 zeigten SUGAWARA et al., daß es möglich ist, zwei chaotisch pulsierende CO₂-Laser zu synchronisieren, indem sie den sättigbaren Absorber des zweiten Lasers gemäß den Intensitätsfluktuationen des ersten Lasers modulierten [79, 85].

3. 1998 gelang es VANWIGGEREN und ROY, zwei erbiumdotierte Faserringlaser zu synchronisieren und ein in den treibenden Laser eingekoppeltes Rechtecksignal zu übertragen [86]. ABARBANEL und KENNEL führten numerische Untersuchungen eines ähnlichen Systems durch [1].
4. Ebenfalls 1998 gelang es schließlich GOEDGEBUER et al., zwei Laserdioden zu synchronisieren, deren *Wellenlängen* aufgrund elektro-optischer Rückkopplung chaotisch fluktuierten [23]. Im gleichen Zuge zeigten sie die Übertragung eines analogen Signals, mit dem sie den Pumpstrom der treibenden Laserdiode modulierten.

Mögliche Anwendungen der Synchronisation chaotischer Gas- und Festkörperlaser zur Übertragung analoger oder digitaler Signale wurden in einigen weiteren Arbeiten mit Hilfe numerischer Simulationen [14, 5] und elektronischer Schaltkreise [52] untersucht.

Die in optischen Kommunikationssystemen typischerweise eingesetzten Laser sind jedoch Laserdioden. Außer der oben unter Punkt 4 erwähnten experimentellen Arbeit existieren mehrere auf *numerischen Simulationen* beruhende Arbeiten, die im folgenden kurz vorgestellt werden.

1. Bereits 1990 untersuchten WINFUL et al. ein aus drei Halbleiterlasern bestehendes Array, in dem benachbarte Laser über ihre Lichtfelder *bidirektional* gekoppelt waren [87]. Neben Synchronisation der beiden äußeren Laser konnte auch raumzeitliches Chaos beobachtet werden.
2. MIRASSO et al. beschäftigten sich 1996 mit der Synchronisation chaotischer Laserdioden mit externen Resonatoren [51]. Um die Änderung des zweiten Systems durch die zusätzliche Injektion von Licht des ersten Systems zu kompensieren, nahmen sie eine höhere Photonenverlustrate (also z. B. höhere Resonatorverluste) für die zweite Laserdiode an. Wegen der dadurch bedingten Unterschiede zwischen beiden Systemen war keine identische Synchronisation möglich. Weiterhin untersuchten sie Informationsübertragung mittels CM (*chaotic masking*),¹ wobei sie auch den Einfluß einer für die Signalübertragung angenommenen Glasfaser berücksichtigten.
3. Ebenfalls 1996 untersuchten ANNOVAZZI-LODI et al. zwei optisch unidirektional gekoppelte, aus je zwei Laserdioden bestehende Injektionssysteme [7]. Synchronisation wurde durch eine optische Rückkopplungsschleife erreicht (siehe Abb. 5.1). 1997 ersetzten sie die Injektionssysteme durch Laserdioden mit externen Resonatoren [8]; im Gegensatz zu [51] konnten sie identische Synchronisation erzielen. Bei beiden Schemata untersuchten sie auch Möglichkeiten der Informationsübertragung mittels CSK (*chaos shift keying*) und CM.

¹ Zur Erklärung der chaotischen Modulationstechniken siehe Abschnitt 2.5

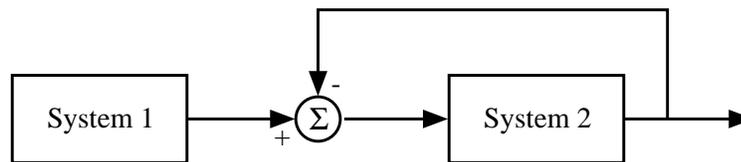


Abbildung 5.1: Synchronisationsschema von ANNOVAZZI-LODI et al.; die Systeme 1 und 2 bestehen aus jeweils einer Laserdiode mit externem Resonator [8] bzw. aus je zwei Laserdioden, wobei Licht der ersten in die zweite Laserdiode injiziert wird [7].

4. Schließlich stellten RAHMAN et al. 1997 ein Synchronisationsschema vor, welches aus einem treibendem chaotischen Halbleiterlaserarray und einem getriebenem einzelnen Halbleiterlaser bestand [69].

Einige der vorgestellten Schemata lassen Probleme bei einer experimentellen Umsetzung erwarten: Für eine optische Rückkopplungsschleife, wie sie in dem Modell von ANNOVAZZI-LODI et al. verwendet wurde, muß die Differenz zwischen den optischen Signalen der beiden Systeme in das zweite System injiziert werden, das Signal des zweiten Systems muß also negiert werden (siehe Abb. 5.1). Dies ließe sich experimentell möglicherweise durch eine optische Phasendrehung erreichen. Ferner wurde in den Modellrechnungen eine Zeitverzögerung durch die Rückkopplungsschleife gänzlich vernachlässigt. Das Synchronisationsschema von MIRASSO et al. kommt ohne Rückkopplungsschleife aus. Probleme bei einer experimentellen Realisierung könnte allerdings die Kompensation der Unterschiede zwischen beiden Systemen durch Erhöhung der Resonatorverluste der zweiten Laserdiode bereiten. Eine solche Erhöhung wäre zwar durch teilweise Entspiegelung der Facetten denkbar, sie ließe sich jedoch während des Experiments nicht ändern und damit nicht an den Einfluß des injizierten Lichtes anpassen.

Im folgenden wird ein Schema vorgestellt und mit Hilfe numerischer Simulationen untersucht, das es ermöglicht, identische Synchronisation zwischen zwei chaotischen Laserdioden mit externen Resonatoren zu erzielen [4]. Eine experimentelle Implementation wird insofern erleichtert, als daß von identischen Laserdioden ausgegangen und keine Rückkopplungsschleife verwendet wird. Außerdem ermöglicht das Schema, eine einfache Laserdiode ohne externen Resonator mit einer chaotischen Laserdiode mit externem Resonator zu synchronisieren; dies stellt eine weitere Erleichterung für eine mögliche experimentelle Implementation dar.

5.2 Beschreibung des Synchronisationsschemas

Die Synchronisationsanordnung, die durch das Modell beschrieben wird, ist in Abb. 5.2 dargestellt. Licht des ersten Systems wird in das zweite System injiziert. Unidirektionale Kopplung kann experimentell durch einen Faradayisolator erreicht werden, der Licht einer Wellenlänge, die nicht zu stark von einer gegebenen Zentralwellenlänge abweicht, unter Ausnutzung des Faradayeffektes nur in einer Richtung durchläßt.

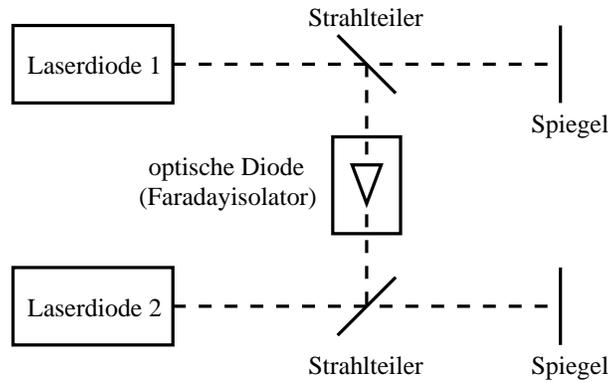


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung der für die Simulationsrechnungen angenommenen Synchronisationsanordnung.

Theoretisch läßt sich das treibende System durch die in Kapitel 4 vorgestellten Lang-Kobayashi-Gleichungen beschreiben,

$$\frac{d}{dt}E_0(t) = \frac{1}{2}G_N n(t)E_0(t) + \frac{C_{sp}\gamma n(t)}{2E_0(t)} + \kappa E_0(t - \tau) \cos[\omega_0\tau + \eta(t)], \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{1}{2}\alpha G_N n(t) - \kappa \frac{E_0(t - \tau)}{E_0(t)} \sin[\omega_0\tau + \eta(t)], \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{dt}n(t) = (p - 1)J_{th} - \gamma n(t) - [\Gamma + G_N n(t)]E_0^2(t), \quad (5.3)$$

mit

$$\eta(t) = \phi(t) - \phi(t - \tau).$$

Die Differentialgleichung für die komplexe elektrische Feldstärke $\tilde{E}(t)$ des zweiten Systems wird analog zu dem in Abschnitt 4.2 beschriebenen Vorgehen um einen weiteren Term er-

gänzt, der die zusätzliche Injektion von Licht des ersten Systems beschreibt,²

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{E}(t) = & \left\{ i\omega(\tilde{N}) + \frac{1}{2}[G(\tilde{N}) - \Gamma] \right\} \tilde{E}(t) + \frac{C_{\text{sp}}\gamma\tilde{n}(t)}{2\tilde{E}^*(t)} + \tilde{\kappa}\tilde{E}(t - \tau) \\ & + \sigma E(t - \tau_c), \end{aligned} \quad (5.4)$$

mit der Laufzeit τ_c des Lichtes von der rechten Facette der ersten bis zu derjenigen der zweiten Laserdiode und der *Kopplungsrate*

$$\sigma = \frac{1}{\tau_{\text{in}}} \sqrt{\frac{(1 - R_{\text{fac}})(1 - \tilde{R}_{\text{fac}})R_{\text{bs}}\tilde{R}_{\text{bs}}}{R_{\text{fac}}}};$$

dabei bezeichnen R_{fac} und R_{bs} die Intensitätsreflektivitäten der Laserdiodenfacette und des Strahlteilers (engl. *beamsplitter*) des ersten Systems, \tilde{R}_{fac} und \tilde{R}_{bs} die entsprechenden Größen des zweiten Systems und τ_{in} die Umlaufzeit des Lichtes innerhalb einer Laserdiode. Mit

$$\begin{aligned} E(t - \tau_c) &= E_0(t - \tau_c) \exp\{i[\omega_0(t - \tau_c) + \phi(t - \tau_c)]\} \\ &= E_0(t - \tau_c) \exp\{-i[\omega_0\tau_c + \tilde{\phi}(t) - \phi(t - \tau_c)]\} \exp\{i[\omega_0t + \tilde{\phi}(t)]\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

kann die komplexe Gleichung (5.4) wie in Abschnitt 3.5 in Real- und Imaginärteil aufgespalten werden. Durch Hinzunehmen der Materialgleichung ergibt sich ein reelles Differentialgleichungssystem für das zweite System,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{E}_0(t) &= \frac{1}{2}G_N\tilde{n}(t)\tilde{E}_0(t) + \frac{C_{\text{sp}}\gamma\tilde{n}(t)}{2\tilde{E}_0(t)} + \tilde{\kappa}\tilde{E}_0(t - \tau) \cos[\omega_0\tau + \tilde{\eta}(t)] \\ &+ \sigma E_0(t - \tau_c) \cos[\omega_0\tau_c + \tilde{\phi}(t) - \phi(t - \tau_c)], \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\phi}(t) &= \frac{1}{2}\alpha G_N\tilde{n}(t) - \tilde{\kappa}\frac{\tilde{E}_0(t - \tau)}{\tilde{E}_0(t)} \sin[\omega_0\tau + \tilde{\eta}(t)] \\ &- \sigma\frac{E_0(t - \tau_c)}{\tilde{E}_0(t)} \sin[\omega_0\tau_c + \tilde{\phi}(t) - \phi(t - \tau_c)], \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{n}(t) = (p - 1)J_{\text{th}} - \gamma\tilde{n}(t) - [\Gamma + G_N\tilde{n}(t)]\tilde{E}_0^2(t), \quad (5.8)$$

mit

$$\tilde{\eta}(t) = \tilde{\phi}(t) - \tilde{\phi}(t - \tau).$$

²Größen des zweiten Systems werden im folgenden mit einer Tilde versehen. Parameter ohne Tilde, die in Gleichungen des zweiten Systems auftreten, haben vorerst die gleichen Werte wie die entsprechenden Parameter des ersten Systems. Der Einfluß von Parameterunterschieden zwischen beiden Systemen wird in Abschnitt 5.3.2 untersucht.

Synchronisation ist *möglich*, falls eine Lösung der Gleichungen (5.1)–(5.3) und (5.6)–(5.8) existiert, für die $\tilde{E}(t) = E(t - \Delta t)$ und $\tilde{n}(t) = n(t - \Delta t)$ gilt, was wegen

$$E(t) = E_0(t) \exp\{i[\omega_0 t + \phi(t)]\}$$

gleichbedeutend ist mit

$$\begin{aligned}\tilde{E}_0(t) &= E_0(t - \Delta t), \\ \tilde{\phi}(t) &= \phi(t - \Delta t) - \omega_0 \Delta t \pmod{2\pi}, \\ \tilde{n}(t) &= n(t - \Delta t),\end{aligned}$$

wobei

$$\Delta t = \tau_c - \tau$$

die durch den Unterschied zwischen τ_c und τ verursachte Zeitverschiebung der synchronisierten Zustände berücksichtigt. Da die Änderungen der Größen des zweiten Systems im synchronen Zustand mit der gleichen Rate wie die Änderungen der Größen des ersten Systems erfolgen müssen, existiert eine derartige Lösung, falls

$$\kappa = \tilde{\kappa} + \sigma \tag{5.9}$$

gilt. Zu beachten ist, daß (5.9) eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für Synchronisation ist, da kleine Störungen das System möglicherweise aus dem synchronisierten Zustand heraustreiben können, wenn dieser nicht stabil ist.

Das verwendete Synchronisationsschema läßt sich durch den in Abschnitt 2.4.1 auf Delaysysteme erweiterten Formalismus der Aktiv-Passiv-Zerlegung beschreiben. Dazu werden folgende Ersetzungen vorgenommen: $\mathbf{x} = (E_0, \phi, n)^T$, $\mathbf{y} = (\tilde{E}_0, \tilde{\phi}, \tilde{n})^T$, $\mathbf{s}(t) = (E_0(t - \tau_c), \phi(t - \tau_c))^T$ und $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ mit

$$\begin{aligned}f_1[\mathbf{z}(t), \mathbf{z}(t - \tau), \mathbf{s}(t)] &= \frac{1}{2} G_{Nz_3}(t) z_1(t) + \frac{C_{sp} \gamma z_3(t)}{2z_1(t)} \\ &\quad + \tilde{\kappa} z_1(t - \tau) \cos[\omega_0 \tau + z_2(t) - z_2(t - \tau)] \\ &\quad + \sigma s_1(t) \cos[\omega_0 \tau_c + z_2(t) - s_2(t)], \\ f_2[\mathbf{z}(t), \mathbf{z}(t - \tau), \mathbf{s}(t)] &= \frac{1}{2} \alpha G_{Nz_3}(t) - \tilde{\kappa} \frac{z_1(t - \tau)}{z_1(t)} \sin[\omega_0 \tau + z_2(t) - z_2(t - \tau)] \\ &\quad - \sigma \frac{s_1(t)}{z_1(t)} \sin[\omega_0 \tau_c + z_2(t) - s_2(t)], \\ f_3[\mathbf{z}(t), \mathbf{z}(t - \tau), \mathbf{s}(t)] &= (p - 1) J_{th} - \gamma z_3(t) - [\Gamma + G_{Nz_3}(t)] z_1^2(t),\end{aligned}$$

wobei vorausgesetzt wurde, daß die Synchronisationsbedingung (5.9), $\kappa = \tilde{\kappa} + \sigma$, erfüllt ist. Aus

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau), \mathbf{s}(t)]$$

ergibt sich dann das Differentialgleichungssystem (5.1)–(5.3) des treibenden Systems, aus

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t - \tau), \mathbf{s}(t)]$$

entsprechend das Differentialgleichungssystem (5.6)–(5.8) des Antwortsystems.

5.3 Modellrechnungen

Die Möglichkeit der Synchronisation zwischen zwei chaotischen Laserdioden mit externen Resonatoren wurde mit Hilfe von numerischen Modellrechnungen untersucht [4]. Dazu wurden die Differentialgleichungen (5.1)–(5.3) und (5.6)–(5.8) durch das in Anhang B beschriebene Verfahren numerisch integriert, wobei die in Tab. 4.1 angegebenen Parameter sowie $\tau_c = 115.833 \text{ ns}$ verwendet wurden.

5.3.1 Synchronisation identischer Laserdioden

Im Falle zweier identischer Laserdioden kann nahezu perfekte Synchronisation erreicht werden. Es wurden Werte $\kappa = 10^{11} \text{ s}^{-1}$ und $\tilde{\kappa} = 10^{10} \text{ s}^{-1}$ für die Rückkopplungsraten gewählt. Mit der Synchronisationsbedingung (5.9) folgt für die Kopplungsrate $\sigma = 9 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$. In Abb. 5.3 ist die Dynamik der einzelnen Laser ohne Kopplung für $\kappa = 10^{11} \text{ s}^{-1}$ (a und b) sowie für $\kappa = 10^{10} \text{ s}^{-1}$ (c) dargestellt. Beide Systeme zeigen aperiodische Dynamik, wobei sich das treibende System im LFF-Bereich befindet (Abbildungen 5.3 a und b). In Abschnitt 4.5 wurde gezeigt, daß das System sowohl für $\kappa = 10^{10} \text{ s}^{-1}$ als auch für $\kappa = 10^{11} \text{ s}^{-1}$ mehrere positive Lyapunovexponenten besitzt, sich also in einem hyperchaotischen Zustand befindet.

Abbildung 5.4 zeigt das Ergebnis der Modellrechnungen zur Synchronisation. Dargestellt sind die Amplituden $E_0(t)$ und $\tilde{E}_0(t)$ der elektrischen Feldstärken der beiden Laserdioden sowie der Synchronisationsfehler

$$\Delta E_0(t) = \frac{|\tilde{E}_0(t) - E_0(t - \Delta t)|}{\langle E_0(t) \rangle_t}, \quad (5.10)$$

wobei $\langle \cdot \rangle_t$ eine zeitliche Mittelung bezeichnet. Nach Einschalten der Kopplung zum Zeitpunkt $t = 25\tau$ geht der Synchronisationsfehler exponentiell mit der Zeit gegen null.

Ähnliche Ergebnisse wurden erzielt, wenn das Antwortsystem aus einer einfachen Laserdiode ohne externen Resonator bestand ($\tilde{\kappa} = 0 \text{ s}^{-1}$, $\sigma = \kappa$). In diesem Fall liefert das Antwortsystem bis zum Einschalten der Kopplung ein Dauerstrichsignal, synchronisiert dann

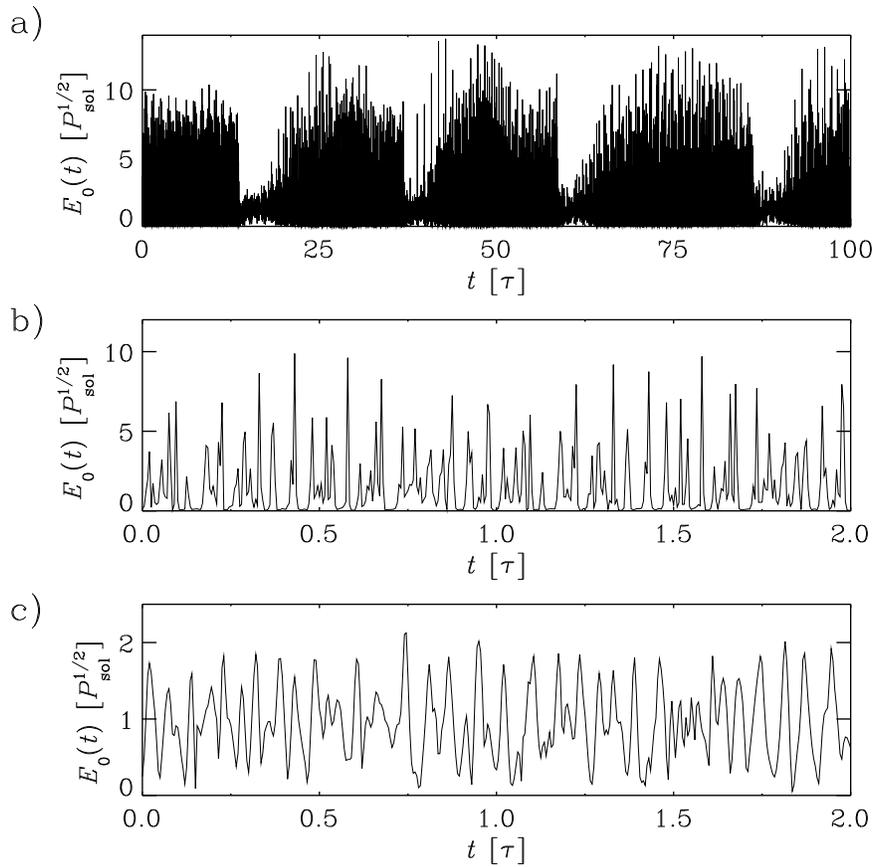


Abbildung 5.3: Dynamik der einzelnen Laser ohne Kopplung für Rückkopplungsraten $\kappa = 10^{11} \text{ s}^{-1}$ (a und b) bzw. $\kappa = 10^{10} \text{ s}^{-1}$ (c); zu beachten sind die unterschiedlichen Achsenskalierungen.

aber mit dem hyperchaotischen Signal des treibenden Systems. Dabei wurden kürzere Transienten des Synchronisationsfehlers als in Abb. 5.4 beobachtet. Ein solches System ist experimentell einfacher zu implementieren als eines mit zwei externen optischen Resonatoren, da einige Parameter (wie die Länge des externen Resonators und die Rückkopplungsrate) weniger zu justieren sind.

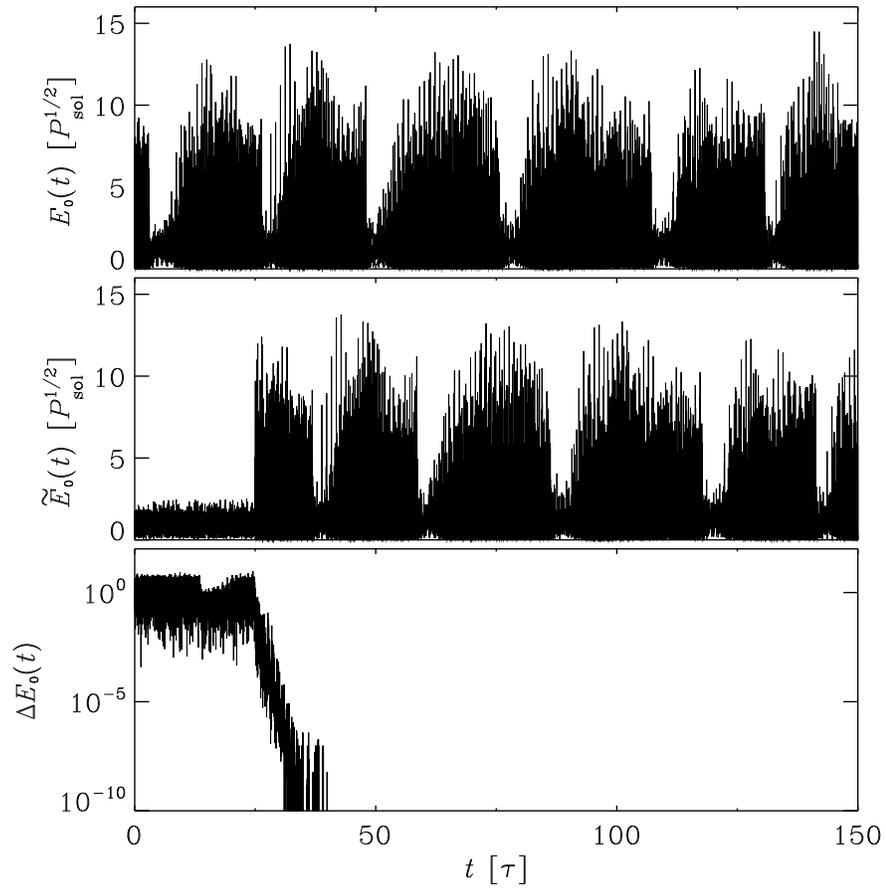


Abbildung 5.4: Perfekte Synchronisation im Falle zweier Systeme mit identischen Parametern ($\kappa = 10^{11} \text{ s}^{-1}$, $\tilde{\kappa} = 10^{10} \text{ s}^{-1}$, $\sigma = 9 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$).

5.3.2 Einfluß von Parameterunterschieden

Zwei reale Laserdioden besitzen niemals exakt identische Parameter, wie es für die bisherigen Rechnungen angenommen wurde. Um den Einfluß von Parameterunterschieden zwischen beiden Systemen auf die Qualität der Synchronisation zu testen, wurden die Parameterwerte des Antwortlasers, die nicht von außen verändert werden können (G_N , α , γ , Γ und C_{sp}), zufällig um bis zu 1% gegenüber den Werten des treibenden Lasers variiert.

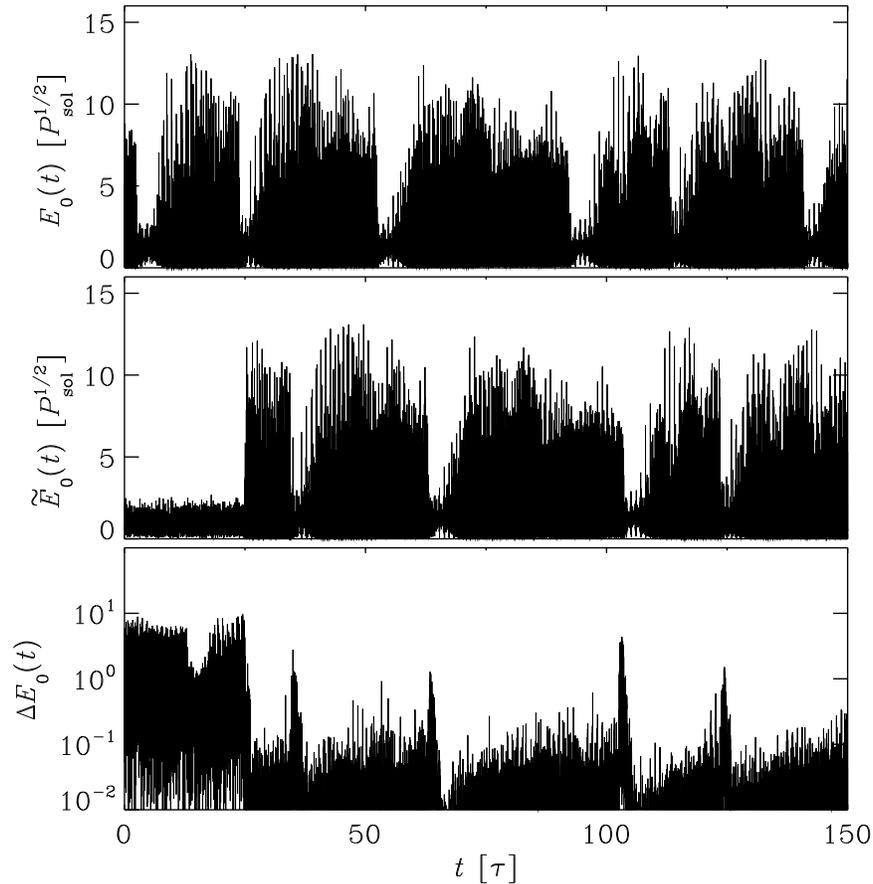


Abbildung 5.5: Synchronisation zweier Systeme mit leicht unterschiedlichen Parametern ($\kappa = 10^{11} \text{ s}^{-1}$, $\tilde{\kappa} = 10^{10} \text{ s}^{-1}$, $\sigma = 9 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$).

Abbildung 5.5 zeigt ein typisches Ergebnis. Wieder wurde zum Zeitpunkt $t = 25\tau$ die Kopplung eingeschaltet. Wie erwartet, wird keine perfekte Synchronisation erzielt. Der Synchronisationsfehler bewegt sich zumeist im Bereich einiger Prozent, wächst jedoch während der Intensitätseinbrüche des treibenden Lasers auf Werte der Größenordnung 1 an, die einen völligen Verlust der Synchronisation anzeigen.

Obwohl keine perfekte Synchronisation erreicht wird, finden die Intensitätseinbrüche dennoch zu gleichen Zeiten statt, wie in Abb. 5.6 zu erkennen ist. Zur Verdeutlichung wurden

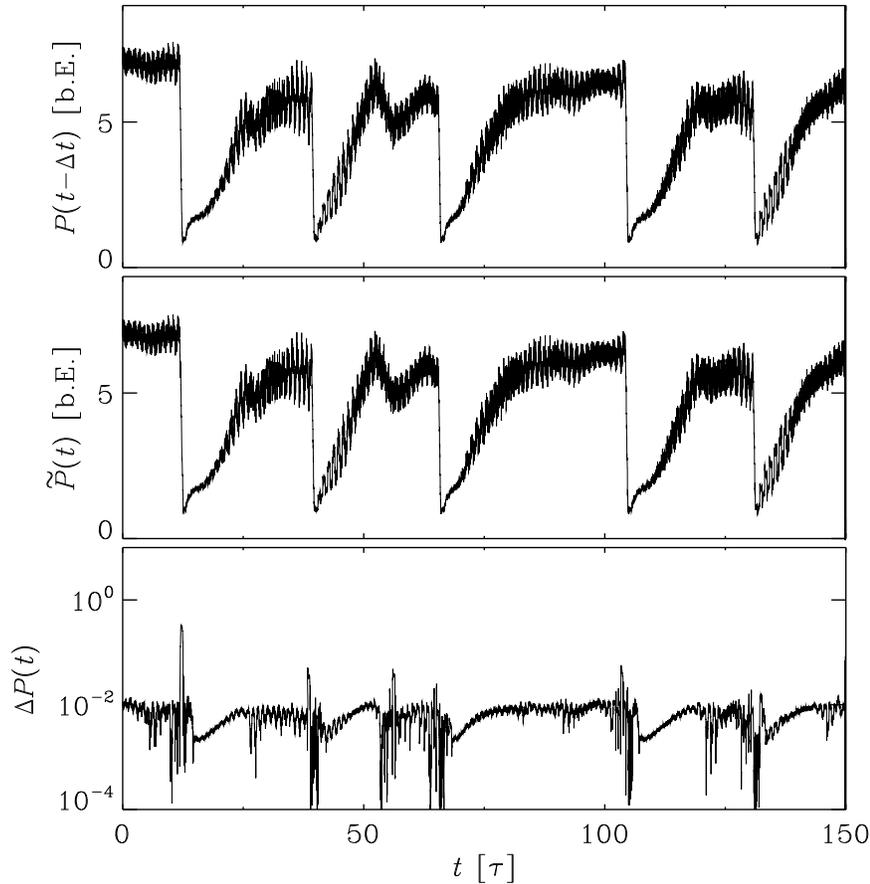


Abbildung 5.6: Gleiche Parameter wie in Abb. 5.5; dargestellt sind die mit 200 MHz tiefpaßgefilterten Zeitreihen der Photonenzahlen $P(t - \Delta t)$ und $\tilde{P}(t)$.

die Photonenzahlen $P(t - \Delta t) = E_0^2(t - \Delta t)$ und $\tilde{P}(t)$ mit 200 MHz tiefpaßgefiltert, so daß die dargestellten Signale ungefähr denen entsprechen, die mit Hilfe von Photodiode und Oszilloskop gemessen werden würden.

In Abb. 5.7 ist das elektrische Feld $\tilde{E}_0(t)$ des Antwortlasers gegen das zeitlich verschobene elektrische Feld $E_0(t - \Delta t)$ des treibenden Lasers aufgetragen. Würden die Systeme perfekt synchronisieren, so würde die Dynamik auf der Diagonalen stattfinden (vgl. Abb. 2.5). Es ist zu erkennen, daß die Synchronisation im Bereich kleiner Amplituden E_0 verloren geht.

5.3.3 Transversal instabile Fixpunkte

Zwei Gründe sprechen dagegen, den Verlust der Synchronisation während der Intensitätseinbrüche allein auf die niedrige Amplitude des treibenden Signals und die damit verbundene schwache Kopplung zurückzuführen: Erstens sinkt die Amplitude des elektrischen Feldes des treibenden Lasers auch zwischen den Intensitätseinbrüchen auf nahezu null (zwischen

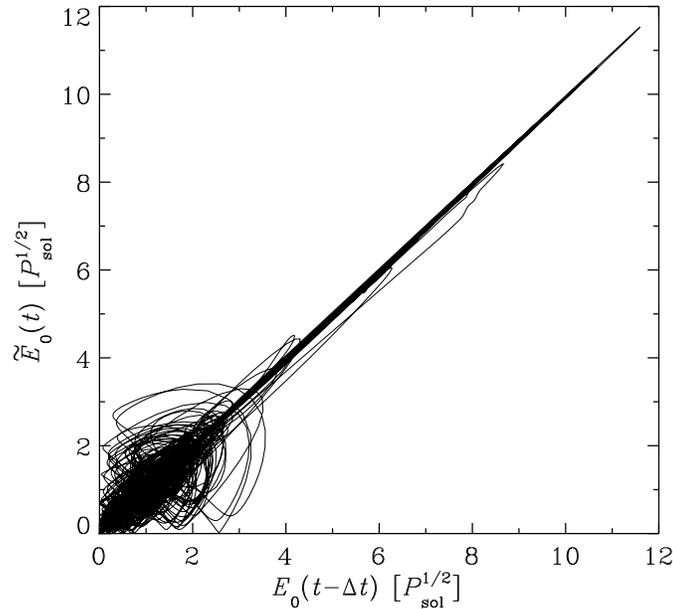


Abbildung 5.7: $\tilde{E}_0(t)$ in Abhängigkeit von $E_0(t - \Delta t)$; im Falle perfekter Synchronisation würde sich das System auf der Diagonalen bewegen.

den Pikosekundenpulsen, siehe Abb. 5.3); zweitens nimmt der Synchronisationsfehler noch im Bereich niedriger Amplitude des Kopplungssignals nach einem Intensitätseinbruch wieder um zwei Größenordnungen ab (siehe Abb. 5.5).

Dagegen gibt es Gründe für die Vermutung, daß die instabilen Sattelpunkte im Phasenraum der Vektoren $(E_0, \eta, n)^T$ (mit $\eta(t) = \phi(t) - \phi(t - \tau)$, siehe Abschnitt 4.3) für den Verlust der Synchronisation verantwortlich sind: Wie von SANO beobachtet wurde, findet ein Intensitätseinbruch statt, wenn das System einem solchen Sattelpunkt zu nahe kommt [76] (vgl. Abschnitt 4.4); außerdem zeigt Abb. 4.4, daß alle Fixpunkte Werte $E_0^s = \sqrt{P^s} < 3$ besitzen; dies ist gerade der Bereich, in dem Synchronisationsverluste auftreten (siehe Abb. 5.7).

Um zu prüfen, welche der in Abschnitt 4.3 beschriebenen Fixpunkte transversal instabil sind, wurde untersucht, ob das Antwortsystem mit dem treibenden System synchronisiert, wenn sich dieses auf einem Fixpunkt befindet. Den Fixpunkten $(P^s, \eta^s, n^s)^T$ entsprechen Dauerstrichlösungen $E(t) = \sqrt{P^s} \exp\{i[\omega_0 t + \phi(t)]\}$, daher wurde das Antwortsystem (5.6)–(5.8) mit den Werten

$$E_0(t) \equiv \sqrt{P^s(\eta^s)} = \sqrt{\frac{(p-1)J_{\text{th}} - \gamma n^s}{\Gamma + G_N n^s}}, \quad (5.11)$$

$$\phi(t) = \frac{\eta^s}{\tau} t \quad (5.12)$$

des zu η^s gehörenden Fixpunktes getrieben (siehe Gleichungen (4.16), (4.10), (4.11) und (4.12)). Die transzendente Gleichung (4.14) wurde numerisch gelöst³, um die Werte η^s der Fixpunkte zu bestimmen. Die Steigung der Funktion $f(\eta)$ aus Gl. (4.17) an der Stelle η^s gibt an, ob es sich bei dem Fixpunkt um eine externe Resonanzmode oder um einen Sattelpunkt (eine Antimode) handelt (vgl. Abschnitt 4.3).

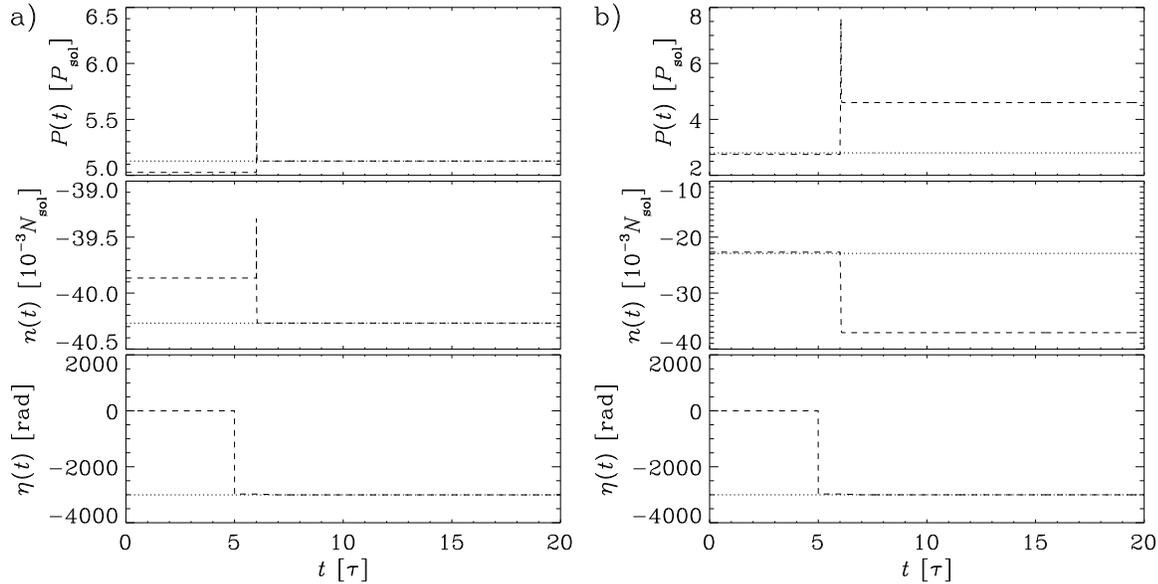


Abbildung 5.8: Befindet sich das treibende System (gepunktete Linie) auf einer externen Resonanzmode, synchronisiert das Antwortsystem (gestrichelte Linie) mit diesem in allen drei Variablen P , η und n (Abb. a). Befindet sich das treibende System dagegen auf einem Sattelpunkt, so synchronisieren beide Systeme nur in der Variablen η (Abb. b). In beiden Fällen wird zum Zeitpunkt $t = 5\tau$ die Kopplung eingeschaltet.

In Abb. 5.8 a ist ein Beispiel gezeigt, bei dem sich das treibende System auf einer externen Resonanzmode befindet. Das Antwortsystem synchronisiert in allen drei Variablen P , η und n mit dem treibenden System. Das gleiche Verhalten wurde für alle externen Resonanzmoden mit Werten $\eta^s \lesssim 900$ gefunden. Bei externen Resonanzmoden mit Werten $\eta^s \gtrsim 900$ wurde keine Synchronisation gefunden; diese Werte erreicht das System im LFF-Bereich jedoch nicht (vgl. Abb. 4.5 b).

Befindet sich das treibende System auf einer Antimode (also einem Sattelpunkt), so findet keine Synchronisation in den Variablen P und n statt. Dies wurde für alle Sattelpunkte festgestellt, in Abb. 5.8 b ist ein Beispiel gezeigt. Es ist jedoch zu erkennen, daß das Antwortsystem in der Variablen η mit dem treibenden System synchronisiert.

³Es wurde eine Kombination aus dem Newton- und dem Bisektionsverfahren verwendet (Routinen `zbrac` und `rtsafe` aus Ref. [67])

Die Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Zwischen den Intensitätseinbrüchen oszilliert das System um die externen Resonatormoden (siehe Abb. 4.9). Die für den LFF-Bereich maßgeblichen externen Resonatormoden ($\eta^s < 0$) sind transversal stabil. Während eines Intensitätseinbruchs gerät das System in die Nähe eines transversal instabilen Sattelpunktes (einer Antimode). Dadurch entfernt sich die Trajektorie von der Synchronisationsmannigfaltigkeit, wie in Abb. 5.7 zu erkennen ist. Es kommt zum Verlust der Synchronisation, bis das System wieder in Bereiche gelangt, in denen die Synchronisationsmannigfaltigkeit anziehend ist.

5.3.4 Einfluß einer Wellenlängendifferenz (Verstimmung)

Bisher wurde davon ausgegangen, daß die Kreisfrequenz ω_0 und damit die Wellenlänge des emittierten Lichtes für beide Laserdioden identisch ist. Zwar läßt sich die Wellenlänge einer Laserdiode über die Temperatur beeinflussen, es kann jedoch nicht davon ausgegangen werden, daß perfekte Übereinstimmung erzielbar ist. Aus Arbeiten zur Injektionsstabilisierung ist bekannt, daß bei zu großer Verstimmung keine Frequenzmitnahme möglich ist. Der Bereich in der Ebene aus Verstimmung und injizierter Leistung, in dem eine Frequenzmitnahme stattfindet, wird *Fangbereich* genannt [70]. Im folgenden wird mittels Modellrechnungen untersucht, inwieweit eine Verstimmung

$$\Delta\omega_0 = \tilde{\omega}_0 - \omega_0$$

zwischen den beiden Laserdioden die Synchronisation beeinflusst. Um eine Verbindung zum Experiment herzustellen (siehe Abschnitt 5.4), wird auf einen externen Resonator des Antwortsystems verzichtet. In den vorgestellten Rechnungen wurden die Werte $\kappa = \sigma = 10^{11} \text{ s}^{-1}$ und $\tilde{\kappa} = 0 \text{ s}^{-1}$ verwendet.

Für die *komplexe* elektrische Feldstärke des in die zweite Laserdiode eingekoppelten Signals gilt

$$\begin{aligned} E(t - \tau_c) &= E_0(t - \tau_c) \exp\{i[\omega_0(t - \tau_c) + \phi(t - \tau_c)]\} \\ &= E_0(t - \tau_c) \exp\{-i[\omega_0\tau_c + \Delta\omega_0 t + \tilde{\phi}(t) - \phi(t - \tau_c)]\} \exp\{i[\tilde{\omega}_0 t + \tilde{\phi}(t)]\}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (5.5) zeigt, daß im Argument der ersten Exponentialfunktion ein zusätzlicher Term $\Delta\omega_0 t$ auftritt, der beim Aufspalten von (5.4) in Real- und Imaginärteil (siehe Abschnitt 3.5) beachtet werden muß. Mit $\tilde{\kappa} = 0 \text{ s}^{-1}$ (s. o.) ergeben sich anstelle von (5.6)

und (5.7) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{E}_0(t) &= \frac{1}{2} G_N \tilde{n}(t) \tilde{E}_0(t) + \frac{C_{\text{sp}} \gamma \tilde{n}(t)}{2 \tilde{E}_0(t)} \\ &\quad + \sigma E_0(t - \tau_c) \cos[\omega_0 \tau_c + \Delta \omega_0 t + \tilde{\phi}(t) - \phi(t - \tau_c)], \\ \frac{d}{dt} \tilde{\phi}(t) &= \frac{1}{2} \alpha G_N \tilde{n}(t) - \sigma \frac{E_0(t - \tau_c)}{\tilde{E}_0(t)} \sin[\omega_0 \tau_c + \Delta \omega_0 t + \tilde{\phi}(t) - \phi(t - \tau_c)]. \end{aligned}$$

Die Gleichung für die Besetzungszahldifferenz (5.8) bleibt unverändert.

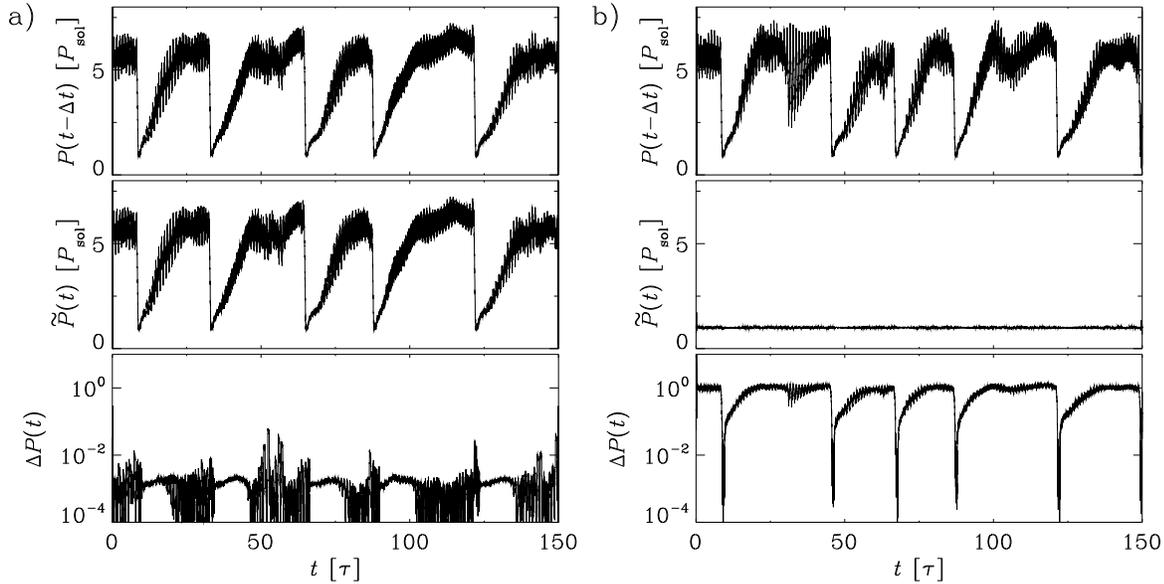


Abbildung 5.9: Bei einer Verstimmung von $\Delta\omega_0 = 10^9 \text{ s}^{-1}$ ist Synchronisation möglich (a), während das injizierte Lichtfeld bei einer Verstimmung von $\Delta\omega_0 = 10^{12} \text{ s}^{-1}$ nur einen sehr geringen Einfluß auf die Dynamik des getriebenen Systems hat (b).

In Abb. 5.9 a ist das Ergebnis für $\Delta\omega_0 = 10^9 \text{ s}^{-1}$ dargestellt. Die Photonenzahlen $P(t) = E_0^2(t)$ wurden mit 200 MHz tiefpaßgefiltert, um die begrenzte Detektionszeit von Photodiode und Oszilloskop zu berücksichtigen. Mit der verwendeten Kreisfrequenz $\omega_0 = 2.9684 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ergibt sich eine relative Verstimmung $\Delta\omega_0/\omega_0 \approx 3.37 \times 10^{-7}$. Wie erwartet, tritt keine perfekte Synchronisation mehr ein, der Synchronisationsfehler bewegt sich in der Größenordnung einiger Promille. Nichtsdestotrotz treten die Intensitätseinbrüche nach wie vor synchron auf.

Bei einer größeren Verstimmung $\Delta\omega_0 = 10^{12} \text{ s}^{-1}$ ($\Delta\omega_0/\omega_0 \approx 3.37 \times 10^{-4}$) ist die Situation dagegen gänzlich anders (siehe Abb. 5.9 b). Die Dynamik der getriebenen Laserdiode wird von dem injizierten Lichtfeld des treibenden Systems kaum beeinflusst, sie emittiert weiterhin auf der stabilen cw-Mode $P(t) \equiv P_{\text{sol}}$.

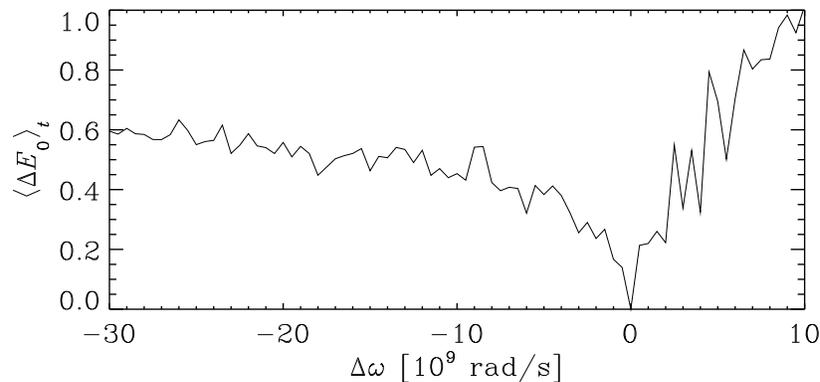


Abbildung 5.10: Darstellung des über die Zeit gemittelten Synchronisationsfehlers aus Gl. (5.10), $\langle \Delta E_0 \rangle_t$, in Abhängigkeit von der Verstimmung $\Delta \omega_0$.

In Abb. 5.10 ist der gemittelte Synchronisationsfehler $\langle \Delta E_0 \rangle_t$, mit ΔE_0 aus Gl. 5.10, in Abhängigkeit von der Verstimmung $\Delta \omega_0$ dargestellt. Die Abhängigkeit ist nicht symmetrisch zu $\Delta \omega_0 = 0$, eine Tatsache, die auch für den Fangbereich bei der Injektionsstabilisierung zutrifft [70]. Die starken Fluktuationen resultieren aus den Intensitätseinbrüchen der LFF, die die Konvergenz der Mittelung verschlechtern.

5.4 Experiment

Abbildung 5.11 zeigt den für die Experimente zur Synchronisation verwendeten Aufbau. Zusätzlich zu den in Abschnitt 4.6 aufgeführten Komponenten wurden verwendet;

- Eine weitere Laserdiode gleichen Typs mit Strom- und Temperaturregelung;
- ein Faradayisolator, 94% Transmission in Durchlaßrichtung, -43 dB Isolation in Sperrichtung (OFR IO-635-HP);
- ein Graukeil, Transmission 1%–80% (Spindler & Hoyer);
- zwei nichtpolarisierende Strahlteilerwürfel, Teilungsverhältnis 50 : 50 (Spindler & Hoyer).

Der Faradayisolator dient dazu, unidirektionale Kopplung zu gewährleisten. Mit Hilfe des Graukeils läßt sich die Kopplungsstärke variieren. Wie in der Beschreibung des Synchronisationsschemas bereits angedeutet, ist als Antwortsystem eine einfache Laserdiode ohne externen Resonator ($\tilde{\kappa} = 0 \text{ s}^{-1}$) gewählt worden, die ohne Kopplung Licht konstanter Intensität emittiert.

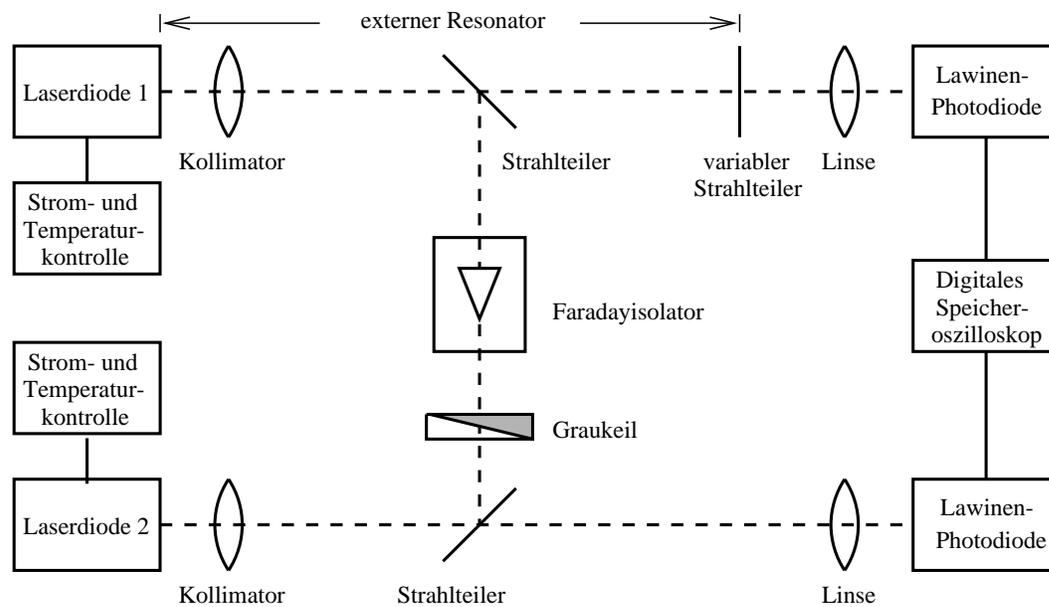


Abbildung 5.11: Experimenteller Aufbau.

Es sind mehrere Parameter zu justieren, um Synchronisation zu erreichen:

- Die Kopplungsstärke muß über den Graukeil so angeglichen werden, daß nach Gl. (5.9) $\sigma = \kappa$ gilt.
- Mit Hilfe von Stellschrauben an der Strahlteilerhalterung wird der Lichtstrahl der ersten Laserdiode in den Resonator der zweiten Laserdiode eingekoppelt. Als Maß für die Einkopplung dient das DC-Signal der in das Gehäuse der Laserdiode eingebauten Monitordiode.
- Über die Temperatur muß die emittierte Wellenlänge der zweiten Laserdiode an die der ersten Laserdiode angeglichen werden.
- Der Pumpstrom der zweiten Laserdiode muß so eingestellt werden, daß das Verhältnis von Pump- zu Schwellstrom (der Parameter p in (5.3) und (5.8)) identisch ist. Da der Wert des Schwellstroms temperaturabhängig ist, bedeutet dies nicht notwendigerweise Übereinstimmung der absoluten Werte des Pumpstroms.

Erste Versuche zeigten keinerlei Reaktion der zweiten Laserdiode auf das injizierte Licht. Da die numerischen Simulationen vorhersagen, daß die zweite Laserdiode auch bei groben Parameterdifferenzen irreguläre Intensitätsfluktuationen zeigen würde, wird vermutet, daß der Grund für diese Beobachtung in der mangelnden Übereinstimmung der Wellenlängen der Laserdioden besteht. Die numerischen Ergebnisse in Abschnitt 5.3.4 deuten an, daß die

Lichtfrequenzen bis auf wenige Gigahertz übereinstimmen müssen. Dies entspricht mit

$$\Delta\lambda = \frac{c}{\nu + \Delta\nu} - \frac{c}{\nu} = -\lambda \frac{\Delta\nu}{\nu + \Delta\nu}$$

für $\lambda = 635 \text{ nm}$ einem Wellenlängenunterschied von $\Delta\lambda \approx 0.0013 \text{ nm}$.

Das Problem ist, derartig kleine Wellenlängenunterschiede zu messen. Eine Differenzfrequenzanalyse (siehe z. B. [44]) scheidet wegen der begrenzten Bandbreite von Photodiode und Oszilloskop aus, und ein im Institut zur Verfügung stehendes Spektrometer besitzt lediglich eine Auflösung von $\Delta\lambda \approx 0.1 \text{ nm}$. Für die Injektionsstabilisierung, die mit dem gleichen Problem konfrontiert ist, werden üblicherweise sogenannte Lambdameter verwendet, die eine Auflösung von $\Delta\lambda \approx 0.001 \text{ nm}$ erreichen [71]. Ein Lambdameter besteht aus einem Michelsoninterferometer mit einem Spiegel, der auf einem Schlitten bewegt werden kann.

Da im Institut kein Lambdameter vorhanden war und in der zur Verfügung stehenden Zeit keines mehr angefertigt werden konnte, wurde ein anderer Weg gewählt: Es wurde sichergestellt, daß Licht der ersten Laserdiode in den Resonator der zweiten Laserdiode eingekoppelt ist (wie oben beschrieben diente als Kontrolle das Signal der Monitorodiode). Der Graukeil wurde nicht eingesetzt. Für die erste Laserdiode wurde ein Pumpstrom gewählt, für den sie sich im LFF-Bereich befindet. Für die zweite Laserdiode wurde ein ähnlicher Pumpstrom gewählt. Während die Temperatur der ersten Laserdiode auf 15°C eingestellt wurde, wurde diejenige der zweiten Laserdiode im Bereich $10\text{--}20^\circ\text{C}$ in Schritten von 0.01°C variiert. Für jede eingestellte Temperatur wurde mit Hilfe des Oszilloskops das Leistungsspektrum des Signals der zweiten Laserdiode berechnet und gespeichert.

Es konnte keine Abhängigkeit des Spektrums von der Temperatur beobachtet werden. Als mögliche Gründe lassen sich denken:

- Die Parameter beider Systeme waren so unterschiedlich, daß die zweite Laserdiode selbst bei übereinstimmender Wellenlänge nicht auf das injizierte Licht der ersten Laserdiode reagierte.
- Aufgrund von Erwärmung der Komponenten traten Veränderungen des Lichtweges auf, so daß das Licht der ersten Laserdiode nicht mehr in den Resonator der zweiten Laserdiode eingekoppelt wurde.
- Der Bereich, in dem die Temperatur der zweiten Laserdiode variiert wurde, war falsch gewählt, d. h. es wurde keine Übereinstimmung der Wellenlängen beider Laserdioden erreicht.

Lohnenswert wäre es auf jeden Fall, mit Hilfe eines Spektrometers zu prüfen, ob die Wellenlängen beider Laserdioden zumindest grob übereinstimmen.

Abschließend läßt sich sagen, daß eine experimentelle Demonstration des vorgestellten Synchronisationsschemas in der für diese Arbeit zur Verfügung stehenden Zeit nicht erreicht werden konnte. Ein möglicher Grund ist die mangelnde Übereinstimmung der Wellenlängen des emittierten Lichtes beider Laserdioden. Solange diese nicht näherungsweise gegeben ist, reagiert die zweite Laserdiode nicht auf das injizierte Licht der ersten Laserdiode. Daher lassen sich die übrigen Parameter (Pumpstrom, Kopplungsstärke, Einkopplung) nicht justieren. Eine mögliche Lösung des Problems wäre der Einsatz eines Lambdameters, wie es für die Injektionsstabilisierung verwendet wird [70].

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die nichtlineare Dynamik chaotischer Halbleiterlaser mit externen optischen Resonatoren im Hinblick auf die Synchronisation zweier gekoppelter solcher Systeme untersucht.

Im ersten Teil der Arbeit wurden die für die folgenden Kapitel benötigten Grundlagen der nichtlinearen Dynamik, der Synchronisation chaotischer Systeme und der Theorie der Halbleiterlaser vorgestellt. Die Synchronisation chaotischer Systeme und eine ihrer potentiellen Anwendungen, die sichere Nachrichtenübertragung, wurden experimentell am Beispiel zweier gekoppelter elektronischer Chuaoszillatoren demonstriert.

Hierauf folgte in Kapitel 4 die Auseinandersetzung mit der Dynamik des Halbleiterlasers mit externem optischen Resonator. Nach einer Darstellung der theoretischen Beschreibung durch das Lang-Kobayashi-Modell wurde die Dynamik untersucht, wobei das Phänomen der niedrigfrequenten Intensitätsfluktuationen (engl. *low frequency fluctuations*, LFF) im Mittelpunkt des Interesses stand. Zur Untersuchung des Modells wurden die auftretenden Delay-differentialgleichungen numerisch integriert. Anhand der Ergebnisse der Simulationsrechnungen wurde die von SANO gegebene Erklärung der LFF erläutert. Durch eine Berechnung der Lyapunovexponenten konnte gezeigt werden, daß sich das System für einen großen Bereich von Werten der Rückkopplungsrate κ in einem hyperchaotischen Zustand befindet. Im LFF-Bereich ergaben sich für alle 100 berechneten Lyapunovexponenten positive Werte. Eine Analyse der experimentell gemessenen Daten stellte sich als schwierig heraus. Aufgrund der wahrscheinlich zugrundeliegenden hochdimensionalen Dynamik und der begrenzten zeitlichen Auflösung der Meßapparatur lieferten die Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse keine befriedigenden Ergebnisse. Es wurde jedoch eine gute Übereinstimmung zwischen Modell und Experiment in bezug auf die Verteilung der Intervalle zwischen den Intensitätseinbrüchen gefunden.

Anschließend wurde in Kapitel 5 die Synchronisation chaotischer Halbleiterlaser behandelt. Nach einem Überblick über den aktuellen Stand der Forschung wurde ein neues Synchronisationsschema vorgestellt, welches identische Synchronisation zweier chaotischer Laserdioden mit externen optischen Resonatoren erlaubt. Nach einer theoretischen Beschreibung im Rahmen des Lang-Kobayashi-Modells wurden die Ergebnisse der numerischen

Simulationen vorgestellt, die zeigen, daß für identische Systeme perfekte Synchronisation möglich ist. Um die Verbindung mit der experimentellen Realität zu wahren, wurde untersucht, inwiefern Unterschiede zwischen beiden Systemen die Qualität der Synchronisation beeinflussen. Obwohl diese erwartungsgemäß sinkt, bleibt das synchrone Auftreten der Intensitätseinbrüche unbeeinflußt. Ferner wurde untersucht, in welcher Weise sich eine Verstimmung, also eine Wellenlängendifferenz zwischen beiden Laserdioden, auf die Synchronisation auswirkt. Hier zeigte sich, daß bereits prozentual kleine Unterschiede die Synchronisation zerstören können. Für größere Unterschiede geht sogar jeglicher Einfluß des treibenden Systems auf das Antwortsystem verloren. Experimentell konnte das Synchronisationsschema in der zur Verfügung stehenden Zeit nicht erfolgreich implementiert werden. Als Grund wird eine mangelnde Übereinstimmung der Wellenlängen beider Laserdioden vermutet. Eine Lösung des Problems könnte durch eine genaue Messung des Unterschiedes zwischen den Wellenlängen beider Laserdioden erreicht werden, damit diese aneinander angeglichen werden können.

Das Phänomen der *low frequency fluctuations* kann nach wie vor nicht als endgültig verstanden erklärt werden. Zwar existieren deutliche experimentelle Bestätigungen des in Abschnitt 4.4 beschriebenen deterministischen Modells, doch nach wie vor gibt es entschiedene Anhänger von Modellen, die die Einbrüche auf stochastische Einflüsse zurückführen. Eine lohnende Aufgabe, auch im Hinblick auf technologische Anwendungen, stellt die Kontrolle der durch den externen Resonator verursachten Intensitätsfluktuationen dar; erste Ansätze existieren bereits [30].

Die Synchronisation chaotischer Halbleiterlaser mit externen optischen Resonatoren ist bisher noch nicht experimentell gezeigt worden. Da auch das hier vorgestellte Synchronisationsschema im Rahmen dieser Arbeit nicht erfolgreich experimentell umgesetzt werden konnte, bleibt sie eine offene Herausforderung. Auf theoretischer Seite ließe sich über ein Kommunikationsschema für die vorgestellte Synchronisationsanordnung nachdenken. Erste numerische Simulationen, bei denen *chaos shift keying* (siehe Abschnitt 2.5) eingesetzt wurde, zeigten vielversprechende Ergebnisse.

Über das betrachtete System hinaus besteht beim Einsatz der Synchronisation chaotischer Systeme zu Kommunikationszwecken noch erheblicher Forschungsbedarf. Einerseits ist für die meisten vorgestellten Schemata zur geheimen Kommunikation noch ungeklärt, wie sicher sie tatsächlich sind, andererseits existieren unabhängig davon auch Ideen, das breitbandige Spektrum chaotischer Systeme für die sogenannte *spread spectrum communication* (dt. etwa Breitbandkommunikation) zu nutzen, die es erlaubt, viele unterschiedliche Signale gleichzeitig über einen Kommunikationskanal zu übertragen sowie die Störanfälligkeit übertragener Signale zu verringern [39].

Anhang A

Lineare Stabilitätsanalyse der Bilanzgleichungen

Für die Stabilitätsanalyse der Gleichungen (3.12) und (3.13) werden die folgenden Skalierungen vorgenommen,

$$\begin{aligned}\hat{P}(t) &= \frac{G_N}{\Gamma} P(t), & \hat{N}(t) &= \frac{G_N}{\Gamma} [N(t) - N_{\text{tr}}], \\ \hat{y} &= \frac{1}{\Gamma} y, & \hat{J} &= \frac{G_N}{\Gamma^2} (J - y N_{\text{tr}}), \\ \hat{t} = \Gamma t & \Rightarrow & \frac{d}{d\hat{t}} &= \frac{1}{\Gamma} \frac{d}{dt},\end{aligned}$$

so daß (3.12) und (3.13) mit

$$f(\hat{P}, \hat{N}) = \begin{pmatrix} [\hat{N}(t) - 1] \hat{P}(t) \\ \hat{J} - \hat{y} \hat{N}(t) - \hat{N}(t) \hat{P}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

in der Form

$$\frac{d}{d\hat{t}} \begin{pmatrix} \hat{P}(t) \\ \hat{N}(t) \end{pmatrix} = f(\hat{P}, \hat{N}) \quad (\text{A.2})$$

geschrieben werden können. Sie entsprechen dann bis auf einen konstanten Faktor den in Referenz [44] behandelten Gleichungen, die folgende Untersuchung orientiert sich an der dort durchgeführten. Als Fixpunkte der skalierten Gleichungen ergeben sich

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_1^s \\ \hat{N}_1^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{J}/\hat{y} \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \begin{pmatrix} \hat{P}_2^s \\ \hat{N}_2^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{J} - \hat{y} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zur linearen Stabilitätsanalyse werden kleine Störungen $(\delta\hat{P}(t), \delta\hat{N}(t))^T$ eines Fixpunktes $(\hat{P}^s, \hat{N}^s)^T$ betrachtet,

$$\begin{pmatrix} \hat{P}(t) \\ \hat{N}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{P}^s + \delta\hat{P}(t) \\ \hat{N}^s + \delta\hat{N}(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

Entwicklung des Systems (A.2) um $(P^s, N^s)^T$ bis zur ersten Ordnung liefert ein lineares Differentialgleichungssystem für die Störungen,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta \hat{P}(t) \\ \delta \hat{N}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{Df}(\hat{P}^s, \hat{N}^s) \begin{pmatrix} \delta \hat{P}(t) \\ \delta \hat{N}(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

wobei

$$\mathbf{Df}(\hat{P}^s, \hat{N}^s) = \begin{pmatrix} \hat{N}^s - 1 & \hat{P}^s \\ -\hat{N}^s & -\hat{y} - \hat{P}^s \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

die Jacobimatrix des zu untersuchenden Systems an der Stelle $(P^s, N^s)^T$ ist. Die Stabilitätseigenschaften der Fixpunkte von Systemen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten lassen sich sehr bequem mit Hilfe der Determinante

$$\det(\mathbf{Df}) = (1 - \hat{N}^s)(\hat{y} + \hat{P}^s) + \hat{N}^s \hat{P}^s, \quad (\text{A.6})$$

der Spur

$$\text{tr}(\mathbf{Df}) = \hat{N}^s - \hat{P}^s - \hat{y} - 1 \quad (\text{A.7})$$

und der Diskriminante

$$D(\mathbf{Df}) = \text{tr}^2(\mathbf{Df}) - 4 \det(\mathbf{Df}) \quad (\text{A.8})$$

der Koeffizientenmatrix ermitteln [44]. Für den ersten Fixpunkt $(P_1^s, N_1^s)^T$ folgt

$$\det(\mathbf{Df}) = \hat{y} - \hat{J}, \quad \text{tr}(\mathbf{Df}) = \frac{\hat{J}}{\hat{y}} - \hat{y} - 1, \quad D(\mathbf{Df}) = \left(\frac{\hat{J}}{\hat{y}} + \hat{y} - 1 \right)^2,$$

es lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

$$\begin{aligned} \hat{J} < \hat{y} &\Rightarrow \det(\mathbf{Df}) > 0, \text{tr}(\mathbf{Df}) < 0, D(\mathbf{Df}) > 0 \\ &\Rightarrow \text{Knoten (stabil)}, \\ \hat{J} > \hat{y} &\Rightarrow \det(\mathbf{Df}) < 0 \\ &\Rightarrow \text{Sattel (instabil)}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Fixpunkt $(P_2^s, N_2^s)^T$ folgt

$$\det(\mathbf{Df}) = \hat{J} - \hat{y}, \quad \text{tr}(\mathbf{Df}) = -\hat{J}, \quad D(\mathbf{Df}) = \hat{J}^2 - 4(\hat{J} - \hat{y}),$$

hier lassen sich die folgenden Fälle unterscheiden:

$$\begin{aligned} \hat{J} < \hat{y} &\Rightarrow \det(\mathbf{Df}) < 0 \\ &\Rightarrow \text{Sattel (instabil)}, \\ \hat{J} > \hat{y} &\Rightarrow \det(\mathbf{Df}) > 0, \text{tr}(\mathbf{Df}) < 0 \\ &D(\mathbf{Df}) > 0 \Rightarrow \text{Knoten (stabil)} \\ &D(\mathbf{Df}) < 0 \Rightarrow \text{Fokus (stabil)}. \end{aligned}$$

Für $\hat{J} = \hat{y}$ haben beide Fixpunkte den gleichen Wert; da sie ihre Stabilitätseigenschaften austauschen, findet eine *transkritische Bifurkation* statt [10].

Werden die vorgenommenen Skalierungen wieder rückgängig gemacht, so ergibt sich für den kritischen Wert J_{th} des Pumpstroms, bei dem der zweite Fixpunkt stabil wird,

$$J_{\text{th}} = \gamma \left(\frac{\Gamma}{G_N} + N_{\text{tr}} \right). \quad (\text{A.9})$$

Ist der zweite Fixpunkt ein Fokus (ist also $\hat{y} < \hat{J} - \hat{J}^2/4$, wie es bei Halbleiterlasern üblicherweise der Fall ist), so treten nach kleinen Störungen des Gleichgewichtszustandes gedämpfte harmonische Schwingungen der Frequenz

$$\nu_{\text{rel}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\hat{J} - \hat{y} - \frac{1}{4}\hat{J}^2} \quad (\text{A.10})$$

um den Gleichgewichtszustand auf, deren Amplituden gemäß $\exp(-\hat{J}t/2)$ abklingen. Diese Schwingungen werden *Relaxationsoszillationen* genannt. Bei größeren Störungen macht sich die Nichtlinearität der Lasergleichungen bemerkbar, die Relaxationsoszillationen sind dann keine harmonischen Schwingungen mehr.

Anhang B

Integration von Delaydifferentialgleichungen

Im folgenden wird das in dieser Arbeit verwendete Verfahren zur numerischen Lösung von Delaydifferentialgleichungen der Form

$$\frac{d}{dt}x(t) = f[x(t), x(t - \tau)] \quad (\text{B.1})$$

beschrieben, welches 1981 von OBERLE und PESCH entwickelt wurde [56] und sich ohne Probleme auch auf Systeme von Delaydifferentialgleichungen anwenden läßt.

Um eine möglichst hohe Genauigkeit ϵ mit einem möglichst geringen Rechenaufwand zu erreichen, wird ein Integrationsverfahren mit adaptiver Schrittweitensteuerung¹ verwendet. Es handelt sich dabei um ein Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren vierter Ordnung (Routinen `rkqs`, `rkck` und `odeint` aus Ref. [67], teilweise modifiziert). Zur Berechnung der Ableitung $\dot{x}(t_n)$ nach (B.1) ist die Kenntnis des Wertes $x(t_n - \tau)$ erforderlich. Dieser Wert befindet sich i. a. nicht unter den bereits berechneten Werten $x(t_i)$, $i = 1, \dots, n - 1$, so daß er durch Interpolation aus bekannten Werten bestimmt werden muß. Um die Ordnung des Integrationsverfahrens zu sichern, muß das Interpolationsverfahren von höherer Ordnung sein [56]. Da durch das Integrationsverfahren ohnehin die Ableitungen $\dot{x}(t_i)$ bekannt sind, liegt es nahe, ein Hermiteverfahren sechster Ordnung zu verwenden, welches $x(t - \tau)$ aus den Werten $x(t_i), \dot{x}(t_i), \dots, x(t_{i+2}), \dot{x}(t_{i+2})$ berechnet, mit $i \in \{1, \dots, n - 3\}$ und $t_i \leq t_n - \tau \leq t_{i+2}$ (Neville-Aitken-Verfahren nach Ref. [78], Abschnitt 2.1).

Für den Start des Integrationsverfahrens werden die Werte $x(t)$ für $t \in [-\tau, 0]$ durch eine stetige Funktion $\varphi(t)$ vorgegeben. Die Ableitung $\dot{x}(t)$ der Lösung von (B.1) kann an den Stellen $t = 0, \tau, 2\tau, \dots, j_p\tau$ unstetig sein, wobei j_p von den Ordnungen des Integrations- und des Interpolationsverfahrens abhängt (für die verwendeten Verfahren ist $j_p = 8$ [56]). Daher ist darauf zu achten, daß diese Stellen nicht innerhalb eines Intervalls $]t_i, t_{i+2}[$ liegen, über dem interpoliert wird. Damit dies vermieden werden kann, muß die Schrittweite h des Integrationsverfahrens für $t \leq j_p\tau$ kleiner als $\tau/(i_p - 1)$ sein, wobei i_p die Anzahl der Stützstellen des Interpolationsverfahrens ist (für das verwendete Verfahren ist $i_p = 3$). Ferner muß

¹Die Schrittweite wird stets so angepaßt, daß auf dem gesamten Integrationsintervall eine vorgegebene Genauigkeit ϵ erreicht wird; für Details siehe Ref. [67], Abschnitt 16.2.

auf dem gesamten Integrationsintervall $h \leq \tau$ sein, damit stets ein Intervall $[t_i, t_i + 2]$ existiert, welches $t_n - \tau$ enthält [56].

Zur Implementation wurde die Programmiersprache C verwendet, alle Rechnungen wurden mit doppelter Rechengenauigkeit durchgeführt. Ein Nachteil des beschriebenen Verfahrens ist, daß die Werte t_i , $x(t_i)$ und $\dot{x}(t_i)$ auf einem Intervall der Länge τ zwischengespeichert werden müssen, so daß für hohe Genauigkeiten ϵ (also kleine Schrittweiten) und viele gleichzeitig zu integrierende Delaydifferentialgleichungen (z. B. für die Berechnung von Lyapunovexponenten) sehr viel Speicher benötigt wird. Einen Überblick über alternative Verfahren gibt Ref. [12].

Anhang C

Notation und häufig verwendete Symbole

z^*	zu z konjugiert komplexe Zahl
$\text{Re}(z), \text{Im}(z)$	Real-, Imaginärteil von z
$\mathbf{v}^T, \mathbf{M}^T$	Transponierte des Vektors \mathbf{v} bzw. der Matrix \mathbf{M}
\mathbf{Df}	Jacobimatrix der vektorwertigen Funktion \mathbf{f}
$\langle x(t) \rangle_t$	zeitliches Mittel von $x(t)$
$\dot{x}(t)$	zeitliche Ableitung $dx(t)/dt$
$x(t) \equiv x_0$	$x(t)$ ist konstant, $\forall t : x(t) = x_0$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 , $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
$\langle \mathbf{y}^i, \mathbf{y}^j \rangle$	in Abschnitt 4.5 definiertes Skalarprodukt
x, \tilde{x}	Größe des ersten bzw. des zweiten zweier gekoppelter Systeme
α	Linienbreitenvergrößerungsfaktor
$\eta(t)$	Phasenunterschied $\phi(t) - \phi(t - \tau)$
Γ	Verlustrate der Photonen
γ	Verlustrate der Ladungsträger im oberen Niveau
κ	Rückkopplungsrate
λ_i	i -ter Lyapunovexponent
$\phi(t)$	langsam veränderliche Phase des elektrischen Feldes
σ	Kopplungsrate zwischen zwei Lasersystemen
τ	Umlaufzeit des Lichtes im externen Resonator
τ_{in}	Umlaufzeit des Lichtes innerhalb der Laserdiode
τ_c	Laufzeit des Lichtes zwischen zwei gekoppelten Lasersystemen
$\omega(N)$	Kreisfrequenz
ω_0	cw-Lichtkreisfrequenz des einfachen Lasers
$\Delta\omega$	Abweichung von der Kreisfrequenz des einfachen Lasers, $\omega - \omega_0$
$\Delta\omega_0$	Kreisfrequenzunterschied zweier Laserdioden, $\tilde{\omega}_0 - \omega_0$
c	Vakuumlichtgeschwindigkeit
C	Rückkopplungsstärke $\kappa\tau\sqrt{1 + \alpha^2}$
C_{sp}	Koeffizient der spontanen Emission

$E(t), E(\omega)$	komplexe elektrische Feldstärke
$E_0(t)$	Betrag der elektrischen Feldstärke
$G(N)$	optische Gewinnfunktion $G_N[N(t) - N_{\text{tr}}]$
G_N	differentieller optischer Gewinn
J	Pumpstrom (Anzahl Elektronen pro Sekunde)
J_{th}	Schwellstrom
$N(t)$	Anzahl Ladungsträger im oberen Niveau
N_{tr}	Transparenzladungsträgerzahl
N_{sol}	Ladungsträgerzahl des einfachen Lasers
$n(t)$	Ladungsträgerdifferenz $N(t) - N_{\text{sol}}$
$P(t)$	Photonenzahl
P_{sol}	Photonenzahl des einfachen Lasers
p	Verhältnis J/J_{th} von Pump- zu Schwellstrom

Literaturverzeichnis

- [1] H. D. I. Abarbanel und M. B. Kennel: Synchronizing high-dimensional chaotic optical ring dynamics. *Phys. Rev. Lett.* **80**(14), 3153–3156, 1998.
- [2] V. S. Afraimovich, N. N. Verichev und M. I. Rabinovich: Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems. *Radiophys. Quantum Electron.* **29**, 795–803, 1986.
- [3] G. P. Agrawal und N. K. Dutta: *Semiconductor Lasers*. Van Nostrand Reinhold, New York, 2. Aufl., 1993.
- [4] V. Ahlers, U. Parlitz und W. Lauterborn: Hyperchaotic dynamics and synchronization of external cavity semiconductor lasers. Eingereicht zur Veröffentlichung in *Phys. Rev. E*, 1998.
- [5] P. M. Alsing, A. Gavrielides, V. Kovanis, R. Roy und K. S. Thornburg, Jr.: Encoding and decoding messages with chaotic lasers. *Phys. Rev. E* **56**(6), 6302–6310, 1997.
- [6] V. Annovazzi-Lodi, S. Donati und M. Manna: Chaos and locking in a semiconductor laser due to external injection. *IEEE J. Quantum Electron.* **30**(7), 1537–1541, 1994.
- [7] V. Annovazzi-Lodi, S. Donati und A. Sciré: Synchronization of chaotic injected-laser systems and its application to optical cryptography. *IEEE J. Quantum Electron.* **32**(6), 953–959, 1996.
- [8] V. Annovazzi-Lodi, S. Donati und A. Sciré: Synchronization of chaotic lasers by optical feedback for cryptographic applications. *IEEE J. Quantum Electron.* **33**(9), 1449–1454, 1997.
- [9] F. T. Arecchi, G. Giacomelli, A. Lapucci und R. Meucci: Two-dimensional representation of a delayed dynamical system. *Phys. Rev. A* **45**(7), R4225–R4228, 1992.
- [10] J. Argyris, G. Faust und M. Haase: *Die Erforschung des Chaos*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1994.
- [11] N. W. Ashcroft und N. D. Mermin: *Solid State Physics*. Saunders College, Philadelphia, Internationale Ausgabe, 1976.

- [12] C. T. H. Baker, C. A. H. Paul und D. R. Willé: Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations. Techn. Ber. 248, University of Manchester/UMIST, Manchester Centre for Computational Mathematics, April 1994.
- [13] L. Chusseau, E. Hemery und J.-M. Lourtioz: Period doubling in directly modulated InGaAsP semiconductor lasers. *Appl. Phys. Lett.* **55**(9), 822–824, 1989.
- [14] P. Colet und R. Roy: Digital communication with synchronized chaotic lasers. *Opt. Lett.* **19**(24), 2056–2058, 1994.
- [15] K. M. Cuomo und A. V. Oppenheim: Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Phys. Rev. Lett.* **71**(1), 65–68, 1993.
- [16] J.-P. Eckmann und D. Ruelle: Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.* **57**(3), 617–656, 1985.
- [17] L. Fabiny, P. Colet, R. Roy und D. Lenstra: Coherence and phase dynamics of spatially coupled solid-state lasers. *Phys. Rev. A* **47**(5), 4287–4296, 1993.
- [18] J. D. Farmer: Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica* **4D**, 366–393, 1982.
- [19] I. Fischer: *Nichtlineare Dynamik und komplexes raum-zeitliches Verhalten von Halbleiterlasern*. Dissertation, Philipps-Universität Marburg, 1996.
- [20] I. Fischer, T. Heil, M. Münkel und W. Elsässer: On the mechanism of the LFF phenomenon in the coherence collapse of semiconductor lasers: There is hope for Sisyphus! In: *Physics and Simulation of Optoelectronic Devices VI*, Bd. 3283 von *SPIE Proc.*, S. 63, 1996.
- [21] I. Fischer, G. H. M. van Tartwijk, A. M. Levine, W. Elsässer, E. Göbel und D. Lenstra: Fast pulsing and chaotic itinerancy with a drift in the coherence collapse of semiconductor lasers. *Phys. Rev. Lett.* **76**(2), 220–223, 1996.
- [22] H. Fujisaka und T. Yamada: Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Prog. Theor. Phys.* **69**(1), 32–47, 1983.
- [23] J.-P. Goedgebuer, L. Larger und H. Porte: Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode. *Phys. Rev. Lett.* **80**(10), 2249–2252, 1998.
- [24] G. R. Gray: Applications of semiconductor lasers. In: *Semiconductor Lasers: Past, Present, and Future*, herausgegeben von G. P. Agrawal, S. 284–320, AIP Press, Woodbury, NY, 1995.

-
- [25] H. Haken: *Licht und Materie II: Laser*. B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1981.
- [26] J. K. Hale und S. M. V. Lunel: *Introduction to Functional Differential Equations*, Bd. 99 von *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [27] R. N. Hall, G. E. Fenner, J. D. Kingsley, T. J. Soltys und R. O. Carlson: Coherent light emission from GaAs junctions. *Phys. Rev. Lett.* **9**(9), 366–368, 1962.
- [28] J. F. Heagy, T. L. Carroll und L. M. Pecora: Desynchronization by periodic orbits. *Phys. Rev. E* **52**(2), R1253–R1256, 1995.
- [29] R. Hegger: Persönliche Mitteilung, Februar 1998.
- [30] T. Heil: *Halbleiterlaser im externen Resonator: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle*. Diplomarbeit, Technische Hochschule Darmstadt, 1997.
- [31] C. E. Henry und R. F. Kazarinov: Instability of semiconductor lasers due to optical feedback from distant reflectors. *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-22**(2), 294–301, 1986.
- [32] C. H. Henry: Theory of the linewidth of semiconductor lasers. *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-18**(2), 259–264, 1982.
- [33] A. Hohl, H. J. C. van der Linden und R. Roy: Determinism and stochasticity of power-dropout events in semiconductor lasers with optical feedback. *Opt. Lett.* **20**(23), 2396–2398, 1995.
- [34] N. Holonyak, Jr. und S. F. Bevacqua: Coherent (visible) light emission from Ga(As_{1-x}P_x) junctions. *Appl. Phys. Lett.* **1**(4), 82 f, 1962.
- [35] K. Ikeda und K. Matsumoto: High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback. *Physica D* **29**, 223–235, 1987.
- [36] K. Jänich: *Analysis für Physiker und Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Aufl., 1990.
- [37] L. Junge: *Synchronisation nichtlinearer dynamischer Systeme*. Diplomarbeit, Georg-August-Universität Göttingen, 1996.
- [38] H. Kantz und T. Schreiber: *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

- [39] M. P. Kennedy: Applications of chaos in communications. In: *Intelligent Methods in Signal Processing and Communications*, herausgegeben von D. Docampo, A. R. Figueiras-Vidal und F. Perez-Gonzalez, Birkhäuser, Boston, 1997.
- [40] L. Kocarev und U. Parlitz: General approach for chaotic synchronization with applications to communication. *Phys. Rev. Lett.* **74**(25), 5028–5031, 1995.
- [41] V. B. Kolmanovskii und V. R. Nosov: *Stability of Functional Differential Equations*, Bd. 180 von *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, London, Orlando, San Diego, 1986.
- [42] B. Krauskopf, W. A. van der Graaf und D. Lenstra: Bifurcations of relaxation oscillations in an optically injected diode laser. *Quantum Semiclass. Opt.* **9**(5), 797–809, 1997.
- [43] R. Lang und K. Kobayashi: External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties. *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-16**(3), 347–355, 1980.
- [44] W. Lauterborn, T. Kurz und M. Wiesenfeldt: *Coherent Optics: Fundamentals and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.
- [45] W. Lauterborn und R. Steinhoff: Bifurcation structure of a laser with pump modulation. *J. Opt. Soc. Am. B* **5**(5), 1097–1104, 1988.
- [46] D. Lenstra, B. H. Verbeek und A. J. den Boef: Coherence collapse in single-mode semiconductor lasers due to optical feedback. *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-21**(6), 674–679, 1985.
- [47] A. M. Levine, G. H. M. van Tartwijk, D. Lenstra und T. Erneux: Diode lasers with optical feedback: Stability of the maximum gain mode. *Phys. Rev. A* **52**(5), R3436–R3439, 1995.
- [48] M. C. Mackey und L. Glass: Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science* **197**, 287–289, 1977.
- [49] T. H. Maiman: Stimulated optical radiation in ruby. *Nature* **187**, 493 f, 1960.
- [50] E. Meyer und D. Guicking: *Schwingungslehre*. Vieweg, Braunschweig, 1974.
- [51] C. R. Mirasso, P. Colet und P. García-Fernández: Synchronization of chaotic semiconductor lasers: Application to encoded communications. *IEEE Photon. Technol. Lett.* **8**, 299–301, 1996.
- [52] R. M. de Moraes, L. de B. Oliveira-Neto und J. R. Rios Leite: Analog circuits simulation of communication with chaotic lasers. *Appl. Phys. Lett.* **70**(11), 1357–1359, 1997.

-
- [53] J Mørk, B. Tromborg und P. L. Christiansen: Bistability and low-frequency fluctuations in semiconductor lasers with optical feedback: A theoretical analysis. *IEEE J. Quantum Electron.* **24**(2), 123–133, 1988.
- [54] J. Mørk, B. Tromborg und J. Mark: Chaos in semiconductor lasers with optical feedback: Theory and experiment. *IEEE J. Quantum Electron.* **28**(1), 93–108, 1992.
- [55] M. I. Nathan, W. P. Dumke, G. Burns, F. H. Dill, Jr. und G. Lasher: Stimulated emission of radiation from GaAs p-n junctions. *Appl. Phys. Lett.* **1**(3), 62–64, 1962.
- [56] H. J. Oberle und H. J. Pesch: Numerical treatment of delay differential equations by Hermite interpolation. *Numer. Math.* **37**, 235–255, 1981.
- [57] E. Ott: *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [58] U. Parlitz, L. O. Chua, L. Kocarev, K. S. Halle und A. Shang: Transmission of digital signals by chaotic synchronization. *Int. J. Bif. Chaos* **2**(4), 973–977, 1992.
- [59] U. Parlitz und L. Kocarev: Synchronization of chaotic systems. In: *Control of Chaos Handbook*, herausgegeben von H.-G. Schuster, Wiley-VCH, Weinheim, erscheint 1998.
- [60] U. Parlitz, L. Kocarev, T. Stojanovski und H. Preckel: Encoding messages using chaotic synchronization. *Phys. Rev. E* **53**(5), 581–588, 1996.
- [61] L. M. Pecora und T. L. Carroll: Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* **64**(8), 821–824, 1990.
- [62] J. H. Peng, E. J. Ding, M. Ding und W. Yang: Synchronizing hyperchaos with a scalar transmitted signal. *Phys. Rev. Lett.* **76**(6), 904–907, 1996.
- [63] G. Pérez und H. A. Cerdeira: Extracting messages masked by chaos. *Phys. Rev. Lett.* **74**(11), 1970–1973, 1995.
- [64] A. S. Pikovsky: On the interaction of strange attractors. *Z. Phys. B* **55**, 149–154, 1984.
- [65] B. van der Pol: Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. *Phil. Mag.* **7-3**, 65–80, 1927.
- [66] B. van der Pol und J. van der Mark: Frequency demultiplication. *Nature* **120**, 363 f, 1926.
- [67] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery: *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 2. Aufl., 1992.

- [68] T. M. Quist, R. H. Redlike, R. J. Keyes, W. E. Krag, B. Lax, A. L. McWhorter und H. J. Zeigler: Semiconductor maser of GaAs. *Appl. Phys. Lett.* **1**(4), 91 f, 1962.
- [69] L. Rahman, G. Li und F. Tian: Remote synchronization of high-frequency chaotic signals in semiconductor lasers for secure communications. *Optics Comm.* **138**, 91–94, 1997.
- [70] H. Rohde: *Injektionsstabilisierung von Laserdioden*. Diplomarbeit, Georg-August-Universität Göttingen, 1996.
- [71] H. Rohde: Persönliche Mitteilung, März 1998.
- [72] R. Roy und K. S. Thornburg: Experimental synchronization of chaotic lasers. *Phys. Rev. Lett.* **72**(13), 2009–2012, 1994.
- [73] N. F. Rulkov und M. M. Sushchik: Robustness of synchronized chaotic oscillations. *Int. J. Bif. Chaos* **7**(3), 625–643, 1997.
- [74] J. Sacher, D. Baums, P. Panknin, W. Elsässer und E. O. Göbel: Intensity instabilities of semiconductor lasers under current modulation, external light injection, and delayed feedback. *Phys. Rev. A* **45**(3), 1893–1905, 1992.
- [75] J. Sacher, W. Elsässer und E. O. Göbel: Intermittency in the coherence collapse of a semiconductor laser with external feedback. *Phys. Rev. Lett.* **63**(20), 2224–2227, 1989.
- [76] T. Sano: Antimode dynamics and chaotic itinerancy in the coherence collapse of semiconductor lasers with optical feedback. *Phys. Rev. A* **50**(3), 2719–2726, 1994.
- [77] A. L. Shawlow und C. H. Townes: Infrared and optical masers. *Phys. Rev.* **112**(6), 1940–1949, 1958.
- [78] J. Stoer: *Numerische Mathematik I*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 5. Aufl., 1989.
- [79] T. Sugawara, M. Tachikawa, T. Tsukamoto und T. Shimizu: Observation of synchronization in laser chaos. *Phys. Rev. Lett.* **72**(22), 3502–3505, 1994.
- [80] D. W. Sukow, J. R. Gardner und D. J. Gauthier: Statistics of power-dropout events in semiconductor lasers with time-delayed optical feedback. *Phys. Rev. A* **56**(5), R3370–R3373, 1997.
- [81] G. H. M. van Tartwijk und D. Lenstra: Semiconductor lasers with optical injection and feedback. *Quantum Semiclass. Opt.* **7**, 87–143, 1995.

-
- [82] G. H. M. van Tartwijk, A. M. Levine und D. Lenstra: Sisyphus effect in semiconductor lasers with optical feedback. *IEEE J. Sel. Topics Quantum Electron.* **1**(2), 466–472, 1995.
- [83] K. S. Thornburg, Jr., M. Möller, R. Roy, T. W. Carr, R.-D. Li und T. Erneux: Chaos and coherence in coupled lasers. *Phys. Rev. E* **55**(4), 3865–3869, 1997.
- [84] B. Tromborg, J. H. Osmundsen und H. Olesen: Stability analysis for a semiconductor laser in an external cavity. *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-20**(9), 1023–1032, 1984.
- [85] T. Tsukamoto, M. Tachikawa, T. Hirano, T. Kuga und T. Shimizu: Synchronization of a chaotic laser pulsation with its prerecorded history. *Phys. Rev. E* **54**(4), 4476–4479, 1996.
- [86] G. D. VanWiggeren und R. Roy: Communication with chaotic lasers. *Science* **279**, 1198–1200, 1998.
- [87] H. G. Winful und L. Rahman: Synchronized chaos and spatiotemporal chaos in arrays of coupled lasers. *Phys. Rev. Lett.* **65**(13), 1575–1578, 1990.

Danksagung

An dieser Stelle danke ich allen, die in irgendeiner Weise zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere:

- Herrn Prof. Dr. Werner Lauterborn für die Ermöglichung der Diplomarbeit und die Aufnahme in die Arbeitsgruppe;
- Herrn Priv.-Doz. Dr. Ulrich Parlitz für die hervorragende Betreuung und die immer neuen Anregungen, mit denen er sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat;
- Herrn Dr. Karl Lautscham und Herrn Dipl.-Phys. Claus-Dieter Ohl für ihre wertvollen Ratschläge zu experimentellen Fragen;
- Herrn Dipl.-Phys. Martin Wiesenfeldt für seine unermüdliche Hilfe bei diversen Computerproblemen;
- den Angestellten der beiden Werkstätten für die Herstellung vieler kleiner und größerer Geräte;
- den Angestellten des Sekretariats und Frau Gisa Kirschmann-Schröder für ihre Unterstützung in technischen und organisatorischen Fragen;
- den Mitgliedern der Arbeitsgruppe *Nichtlineare Dynamik*, insbesondere meinen ZimmerkollegInnen, für die angenehme, offene Atmosphäre;
- meinen Eltern Klaus und Haide Ahlers für die Ermöglichung meines Studiums durch ihre finanzielle Unterstützung;
- und schließlich ganz besonders meiner Freundin Anke Spötter für immer offene Ohren und eifriges Korrekturlesen.